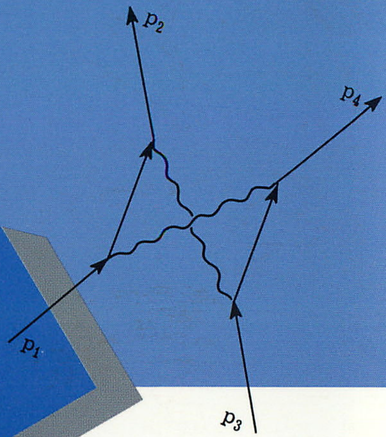
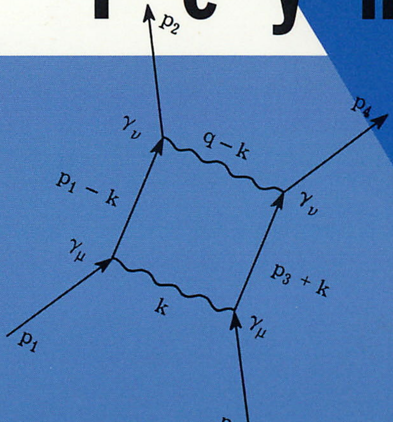
ファインマン・レクチャー

素粒子物理学

Richard P. Feynman

訳＝大場一郎





丸善株式会社

ファインマン・レクチャー

素粒子物理学

訳＝大場一郎

丸善株式会社

The Theory of Fundamental Processes

A Lecture Note Volume

by

Richard P. Feynman

はじめに

Preface

この本は，1958 年，コーネル大学を訪れた際に行なった一連の特別講義録である。自分の大学でない学生に講義するときには，隅々のことやむずかしくて細々したことは省略して，新しい教授法を試みてみたいとの誘惑に負けそうになる。だが，そういう特別な試みをしたために，学生の教育達成目標が阻害されてしまうとすれば，他の誰かがそれを繕う責任を負うはめになる。

今日私たちの理解している物理の中には，複雑な定式化の中に埋没してしまいがちではあるが，電気力学，β 崩壊，アイソスピンの規則，ストレンジネスなどの，ある種の単純さがある。強い相互作用の力学を究極的に理解するためには，この単純さが必要欠くべからざるものであると思う。理論物理学者となり，いつの日にか強い相互作用を解く鍵を見出そうと準備怠りないような人なら，これらの複雑な定式化は一切合財完全に身につけておかねばならないのだと思うかも知れない。しかし，全く逆もしかりなのである。つまり，すでに誰でも試みたが，不首尾に終わっているところには近づかなくてもよいのかも知れない。とにかく，大いに役に立つのは，すでに実験でチェックされているものを分析し，私たちの理論的知識がどれほど大量に使用されているか，あるいは，わずかにしか使用されていないかを調べてみることであるのがわかろう。必要なのは，私たちの現在の知識の中で何が本質なのか，また，実験と深刻に矛盾することなしに何が変更できるかを明確に識別することである。

ここでは多少とも定量的理論のある現象については，その理論を記述した。ただ 1 つの例外がある。π 中間子-核子を分析している分散理論は部分的に成功しているが，省略した。主として時間が足らなかったからである。たった 6 ヶ月の連続講義であった。もっと完全なコースは 1959〜1960 年にカルテ

クでやったが，その時この講義録を部分的に使った。カルテクの講義では分散理論と主要極による断面積の評価を追加したが，残念なことに，その時の講義録は作られていない。

この講義録はカルーザース(P. A. Carruthers)とナウエンバーグ(M. Nauenberg)がコーネル大学での講義をもとに作成した。第6章から第14章までは，1958年，ジュネーブで行なわれた第2回原子力平和利用会議での報告として書かれた。ユーラ(H. T. Yura)が編集と校正をした。

カリフォルニア州パサデナ
1961年11月

R. P. ファインマン

Richard P. Feynman

The Theory of Fundamental Processes

目次

Contents

1

量子力学の原理のレビュー

Review of the Principles of Quantum Mechanics

この講義では物理学のあらゆる分野に言及することになろう。多粒子系の問題も少数粒子の相互作用をもとにして理解できるので，主として後者を扱うことにする。現在観測されている現象を説明するためには，理論を修正する必要があると思うので，最も一般的な形で量子力学の基礎を考えることにしたい。たとえば，ストレンジ粒子に関わる現象を取り扱うために用いる理論の基礎を構成するとき，必要な最小の仮定は何かということは，こうすることによって初めて理解できるのである。

この本の概要は次の通りである。まず最初に量子力学のいろいろな概念を述べるが，主として振幅の考え方を中心とし，それから導ける角運動量結合法則などの概念に力点を置く。次に相対性理論と反粒子概念を簡単に述べる。それから，既知の粒子を定性的にきちんと記述する方法と，粒子間の相互作用についてわかっていることを述べる。そうした上ではじめに戻り，現在までに実際計算されている2種類の相互作用を定量的に詳しく調べる。β崩壊と電磁相互作用であるが，後者の研究は量子電気力学として知られており，それを説明することにこの講義のほとんどが当てられている。

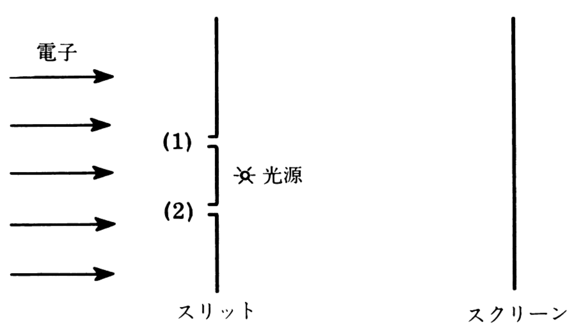
そこで，量子力学の諸原理のレビューから始めよう。現在までに観測されているあらゆる過程は次のような方法で理解できる。すなわち，過程ごとに1つの振幅が対応し，適宜規格化すれば，その過程の確率は振幅の絶対値2乗に等しい。これらの用語の厳密な意味は次の例を見ればもっとはっきりするだろう。振幅を計算する規則はのちほど明らかになろう。

まず最初に電子の2重スリット実験を詳しく考えてみる。運動量pの一様な電子ビームが2重スリットに入射する。もっと正確に言えば，($p_x=p$，$p_y=$

$p_z=0$ の電子を用意して）横方向にはランダムに分布させた連続的な電子のグループを考える。(ファインマンいわく，電子は一定のエネルギーで 1 個の穴から出てくるはず。)

電子がスクリーンに当たると，その位置を記録する。考えている過程は次のようなものである。確定した運動量を持つ電子がスリット系をともかくも通り抜け，スクリーンへ進んでいく (図 1-1)。このとき，電子がどのスリットを通り抜けたか，抜けなかったかはそれを決定できる装置を実際に取り付けない限り，問題にできないのである。しかし，取り付けると，それは別の過程を考えていることになってしまう。そうは言うものの，いま考えている過程の振幅 a を，電子がスリット (1) を通過する振幅 a_1と (2) を通過する振幅 a_2とに分離して，関係づけることはできる。[たとえば，スリット (2) が閉じられているなら，電子がスクリーンに当たる振幅は a_1 (確率は $|a_1|^2$) となる。] 自然界の法則は簡単に $a=a_1+a_2$となる。これは量子力学における重ね合わせの原理の特別な場合である (文献 [1] を参照)。一般に $P_a \neq P_{a_1}+P_{a_2}$ ($P_{a_1}=|a_1|^2$, $P_{a_2}=|a_2|^2$) となることは明らかで，古典の場合とは区別できる。ここでは確率の間に“干渉”がある (文献 [2] を参照)。P_aの具体形は光学でよく知られている。

ここで，電子が“実際”どのスリットを通過したかを見るために，図 1-1 に示すようにスリット 1 と 2 の間に光源を置くとしよう (散乱される光子を観測する)。この場合の干渉パターンは，2 つのスリットがそれぞれ独立と考えられたものと等しくなる。この状況を説明する 1 つの方法として次のような



〈図 1-1〉

ものがある。電子の位置を測定したために，運動量にΔp_yの不確定性が与えられると同時に制御不能なやり方で振幅が変えられてしまい，その結果，多数の電子について平均すると，制御不能なランダムな位相のために“干渉”はゼロとなる（この点に関する詳細はボーム（D. Bohm）の文献［3］を参照)。しかし，私は次のように考えるのが好きである。つまり，電子を観測すると，実際には考えている過程が変化してしまっているのである。そこでは，光子と光子の電子による相互作用を考察しなければならない。したがって，以下の振幅を考察することになる。

a_{11}＝電子はスリット 1 を通過し，光子がスリット 1 の後ろで散乱された過程の振幅

a_{21}＝電子はスリット 2 を通過し，光子がスリット 1 の後ろで散乱された過程の振幅

a_{12}＝電子はスリット 1 を通過し，光子がスリット 2 の後ろで散乱された過程の振幅

a_{22}＝電子はスリット 2 を通過し，光子がスリット 2 の後ろで散乱された過程の振幅

したがって，スリット 1 で観測された電子がスクリーンに当たる振幅は，$a'=a_{11}+a_{21}$であり，スリット 2 で観測された電子がスクリーンに当たる振幅は，$a''=a_{12}+a_{22}$である。きちんと設定されている実験では明らかに $a_{12}\simeq 0\simeq a_{21}$であるから，前述した実験のように $a_{11}\simeq a_1$，$a_{22}\simeq a_2$となる。一方，振幅a'と a''は別の過程に対応するものであるから，スクリーンに当たる電子の確率は $P'_a=|a'|^2+|a''|^2=|a_1|^2+|a_2|^2$となるのである。

もう 1 つの例は結晶による中性子散乱である。

(1) スピンを無視した場合：観測点での全振幅は原子ひとつひとつからの散乱振幅の和に等しい。その結果，ブラッグ回折パターンが得られる。

(2) スピン効果を考慮した場合：原子はすべて上向きスピン，中性子は下向きスピンを持っているとしよう（原子スピンは局在化されていると仮定する)。(a) スピンが変化しない場合――（1）と同じ，(b) スピンが変化する場合――散乱波のエネルギーと波数は (a) の場合とまったく同じであるにも関わらず，回折パターンは観測されない。この理由は簡単であり，散乱した

原子のスピンは下向きに変わっており，原理的には，その原子をその他の原子と区別できるからである。この場合，原子 i による散乱は原子 $j \neq i$ による散乱とは**異なる過程**なのである。

原子の(局在化した)スピンの向きは変えないが，波数 $k = k_{\mathrm{inc}} - k_{\mathrm{scatt}}$の(局在化していない) スピン波を励起させると，再び回折効果が部分的に現れよう。

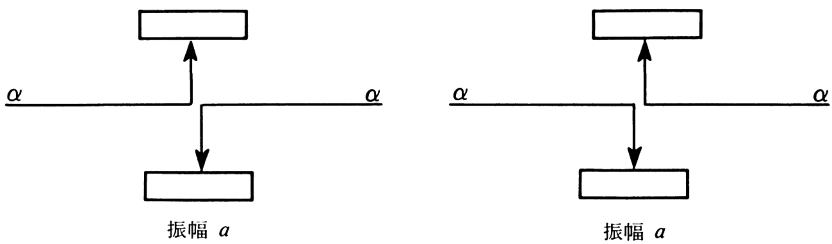
質量中心系で 90°の散乱を考えてみよう［図 1-2 (a)～(d)を参照]。

(a)スピン 0 の同種の 2 粒子の場合：2 通りの散乱があるが，互いに区別できない。したがって，全振幅は $2a$ であり，$P = 4|a|^2$となる。この値は古典的に予想されるものの 2 倍である。

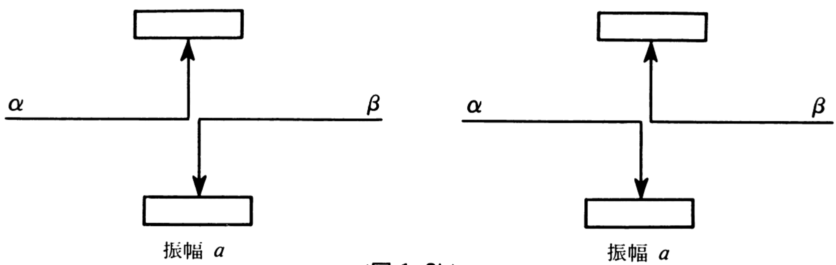
(b) スピン 0 だが区別できる 2 粒子の場合：2 通りの過程は区別できるので，$P = |a|^2 + |a|^2 = 2|a|^2$　となる。

(c)スピンを持つ 2 電子の場合：2 通りの過程が区別できるので，$P = |a|^2 + |a|^2 = 2|a|^2$となる。

(d)しかし，入射粒子が 2 個ともスピン上向きの場合には，2 通りの過程が区別できない。そして，全振幅は $a - a = 0$ となる。これは新しい状況である



〈図 1-2a〉

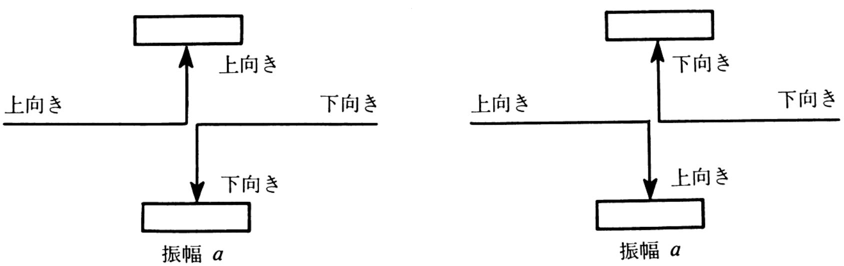


〈図 1-2b〉

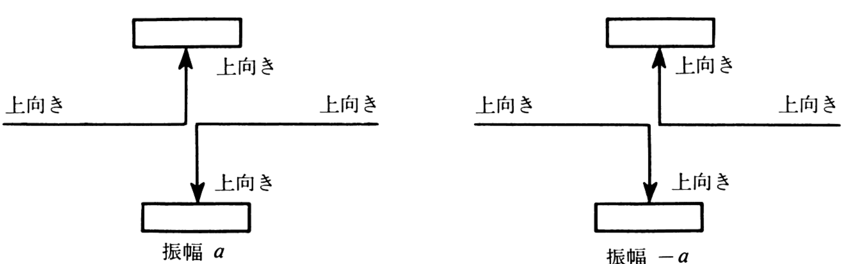
が，次章で議論する。

●

問題 1-1 （たとえば電波星などの）2 個の電波源があり，それらがどのくらい離れているかを知る必要があったとしよう。2 個の受信装置で電波の強度を同時に測定し，強度の積を装置間の距離の関数として記録する。この相関を測定すると，求めている電波源間の距離が計算できる。1 個の装置では，平均するとパターンは消える。それは，電波源 A，B の相対位相がランダムに変動しているからである。たとえば，図 1-3 では相対位相が 0 でパターンが極大となる 2 点に 2 個の装置を置いている (表 1-1)。L と R を極大と極小になる距離だけ離して置けば，表 1-2 となる。そこで，2 個のカウンターに同時に入ってくる光子の確率を計算せよ。そして，受信装置間の距離を変化させたときの効果を調べよ。また，量子力学の立場からこの過程を考察してみよ。



〈図 1-2c〉



〈図 1-2d〉



〈図 1-3〉

〈表 1-1〉

電波源間の相対位相	L	R	積
0°	2	2	4
180°	0	0	0
90°	1	1	1
270°	1	1	1
			平均＝1.5

〈表 1-2〉

電波源間の相対位相	L	R	積
0°	2	0	0
180°	0	2	0
90°	1	1	1
270°	1	1	1
			平均＝0.5

問題 1-1 についての検討　光子を同時に観測するには 4 通りある：

(1) 2 光子とも A から来る：振幅 a_1

(2) 2 光子とも B から来る：振幅 a_2

(3) 受信装置 L が A からの，R が B からの光子：振幅 a_3

(4) 受信装置 L が B からの，R が A からの光子：振幅 a_4

(1) と (2) の過程は互いに区別でき，そしてまた (3)，(4) の過程とは区別できる。しかしながら，(3) と (4) は区別できない。［たとえば，(1) と (2)

の場合，どの電波源が放出したかを知るためには，原理的には放射体のエネルギースペクトルを測定すればよい。]

したがって，$P=|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3+a_4|^2$となる。$|a_3+a_4|^2$の項には干渉効果が含まれている。光子の代わりに電子を使って相関をとれば，この項は$|a_3-a_4|^2$となることに注意せよ。

2

スピンと統計

Spin and Statistics

私たちの学ぶべきなのは量子力学の言葉で直接考えることである。ただ1つ神秘的なのは，なぜ振幅を加え合わせなければならないのか，また，なぜある過程の確率が $P=|(\text{全振幅})|^2$ という規則で与えられるのかということである。ここで，2つの過程が互いに2粒子の交換で移り変わる場合に，振幅を加え合わせる規則に戻って考察してみよう。

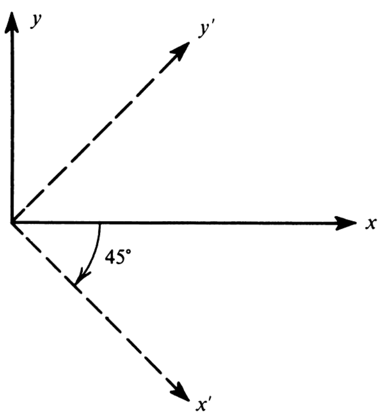
過程 P（振幅 a）と（**それとは区別できない**）過程 P_{ex}（振幅 a_{ex}）を考えよう。自然界には次のような著しい規則のあることがわかる。つまり，(ボソンと呼ばれる)あるクラスの粒子の全振幅は $a+a_{\mathrm{ex}}$ であり，(フェルミオンと呼ばれる)別のクラスの粒子の全振幅は $a-a_{\mathrm{ex}}$ となる。スピンが1/2, 3/2, …の粒子はフェルミオンであり，スピンが0, 1, 2, …の粒子はボソンである。これは量子力学と相対論，それにわずかなことを付け加えれば導ける。パウリ（W. Pauli）の文献[4]で論じられており，ごく最近では，リューダース（G. Lüders）とズミノ(B. Zumino)[5]が論じている。

この枠組みを適用する際に重要なのは，粒子（あるいは系）がとりうるあらゆる状態を知っておかねばならないことである。たとえば，偏極を知らなければ，異なる偏極では干渉しなくなることが理解できないであろう。もし，いま使っている法則に何か不都合な点が見つかれば（たとえば，何か新粒子についてなど），状態を完全に記述する何か新しい自由度を探さなければならないのである。

縮退度

ある一定の方向へ偏極した光のビームを考えよう。アナライザー（たとえ

ば偏光板，ニコルプリズムなど）の軸を順に2つの直交する x, y 方向に置き，対応する方向に偏極しているビーム中の光子数を測定する（もちろん，x，y 方向はビーム方向に垂直である）。x 方向に偏極している光子が到着する振幅を a_x，y 方向のを a_y としよう。ここで，アナライザーを45°回転すると，この方向に光子が到着する振幅 $a_{45°}$ はどうなるであろうか。答は $a_{45°}=(1/\sqrt{2})(a_x+a_y)$ であり，一般に（x 軸からの）角 θ では $a(\theta)=\cos\theta\ a_x+\sin\theta\ a_y$ となる。ポイントは，任意の偏極状態を規定するのに必要なのはたった2個の数（ここでは a_x と a_y）だけということである。このことが，他にどう軸を選んで光子を記述しても同等に正しいという事実と関係していることは理解できよう。



〈図 2-1〉

たとえば，(x，y) に対して－45°回転した新しい座標系 (x'，y') を考えよう（図2-1）。この座標系で見ている観測者は次のような状況となる。

$$a'_{x'}=(a_x-a_y)/\sqrt{2}$$

$$a'_{y'}=(a_x+a_y)/\sqrt{2}$$

$$a'_{45°}(\text{in }x',\ y')=(a'_{x'}+a'_{y'})/\sqrt{2}$$

$$=[(a_x-a_y)/2]+[(a_x+a_y)/2]$$

$$=a_x\ \text{（当然のことであるが）}$$

光子状態を何らかの2次元空間のベクトル $\boldsymbol{e}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}$ で表せる。そうすると，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta$ 方向に偏極している光子が見いだされる振幅は $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}$ となる。

系の状況が空間の方向に無関係であるとすると，可能な系の性質は強く限定される。z 軸に沿って γ 線を放出しやすい核，あるいは原子を考えよう(図2-2)。ここで，核と検出装置，すべてを回転する。当然，光子は対応する方向へ放出されよう。



〈図 2-2〉

もし，核がただ1つの振幅，たとえばエネルギーによる1つの振幅で規定されているとすると，γ 線はあらゆる方向に等しい確率で放出されるはずである。なぜか？　それは，もしそうでないとすると，x 方向に γ 線が出てくるように装置を配置できるからである（装置，つまり考えている系はいつでも回転できるし，物理法則は軸の選び方に無関係である)。この状況下で予言される現象(γ 放出)は現実とまったく合っていないので，1つの振幅で規定されるというこの条件は良くない。この状態のようにただ1つの振幅では2つの予言はできないのである。この状態は多成分の振幅で記述される。もし，きわめて鋭い角分布の場合は，その核状態を規定するには多数の振幅が必要となる。

ちょうど系が n 成分の振幅で記述されているとしよう：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

ここで問題を出そう：系が $a_1=1$，$a_2=\cdots=a_n=0$ の状態にあるとしよう。回転した新しい座標系で系を特徴づける振幅はどうなるか？

それらを

$$\begin{pmatrix} D_{11}(R) \\ D_{21}(R) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ D_{n1}(R) \end{pmatrix}$$

で定義しよう。同様に，$a_2=1$，$a_1=a_3=\cdots=a_n=0$ の状態から出発すると，

$$\begin{pmatrix} D_{12}(R) \\ D_{22}(R) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ D_{n2}(R) \end{pmatrix}$$

となる。このようにして，全体では行列 $D_{ij}(R)$ が必要となる。

はじめに系が状態

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

にあるとすると，状況はもっと複雑になる。回転したあとの新しい状態は

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a'_n \end{pmatrix}$$

となる。ここで，$a'_i=\sum_j D_{ij}(R)\,a_j$である。こうなることの理由を考えよ。

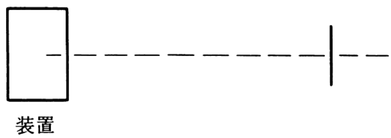
3

回転と角運動量

Rotations and Angular Momentum

前章の講義では，装置が対象を状態 a に変えてしまうことを話した。

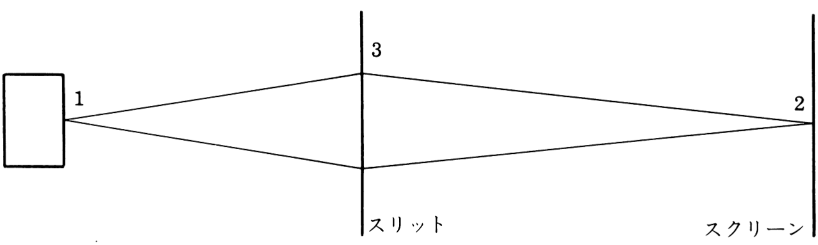
$$a=\begin{pmatrix}a_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_n\end{pmatrix}$$



これには少し説明を要する。これまでは完全な事象についての振幅概念だけしか導入していない。完全な事象とは対象の生成とその検出である。この振幅は以下のようにして求められる。

対象が添字 i で特徴づけられる状態に置かれている振幅 a_iがあるとしよう。このとき対象がある検出器をたたく振幅を b_iとする。そうすると完全な事象（生成と検出）の振幅は a_ib_iであり，可能な中間状態 i については和をとる。

ここで再び 2 重スリットを通過する電子の実験を考えよう（図 3-1）。電子

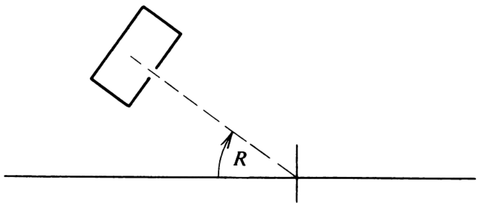


〈図 3-1〉

があるスリットを通り抜ける振幅を $a_{1\to3}$，このスリットにあった電子がスクリーンの位置2に到着する振幅を $a_{3\to2}$とすると，完全な事象の振幅は積 $a_{1\to3}\times a_{3\to2}$となる。

ここで，検出器は変えないが，装置を $\boldsymbol{R}(|\boldsymbol{R}|=$回転角，$\boldsymbol{R}/|\boldsymbol{R}|=$回転軸)だけ回転して，対象が状態 a'

$$a'=\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$



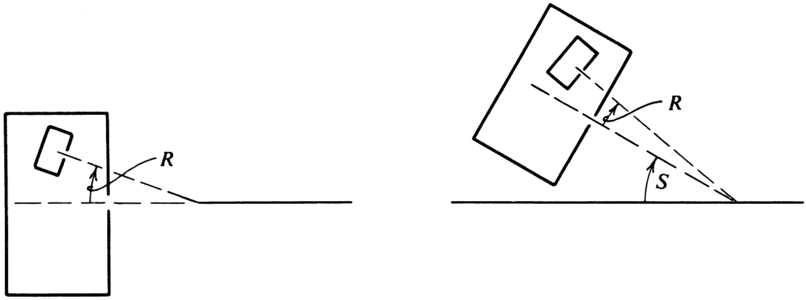
にあるようにする。この状態は $a'=D(R)a$ の式で a と関係づけられると前に言っておいた。ここで行列 $D(R)$ は装置が何からできているかには無関係である。別の実験(図 3-2)では，まったく同じ対象が何か別の状態 b や b'となるであろう。ここで $b'=D(R)b$ であり，$D(R)$ は同じものである。どうしてこの関係が線形でなければならないのか？　その理由は対象が干渉するからである。装置が2つの部分から構成されているとしよう。1つは対象を状態 a に，もう1つは同じ対象を b に，そして2つ合わせると状態 $a+b$ に変える。回転したあとで，回転した系でも前と同じように干渉現象が現れるには，それぞれが，a'，b'，そして $a'+b'$となろう。したがって，

$$a'=D(R)a,\quad b'=D(R)b,\quad (a+b)'=D(R)(a+b)$$

となるが，$(a+b)'=a'+b'$であるから，$D(R)(a+b)=D(R)a+D(R)b$ となるのである。



〈図 3-2〉



〈図 3-3〉

このほかにどういうものが導けるであろうか？

R だけ回転した装置は対象を a' に変えるが，それから出発してみよう。図 3-3 に示すように，それをさらに S だけ回転する。いままで述べた規則によれば，これにより対象は状態 a'' に変えられる。ここで $a''=D(S)a'$ である。$a'=D(R)a$ であるから，$a''=D(S)D(R)a$ となるが，これは $D(SR)=D(S)D(R)$ となることを意味する†。

回転は群をなし，D はこの群の行列表現である。表現の具体形がどうなるかは疑いもなく自明なことである。

例：

（1）対象が複素数 1 個で表現されている場合。D は 1×1 行列である。つまり複素数となるが，それは 1 に選べる。

（2）対象がベクトルで表現されている場合。振幅はベクトルの x，y，z の 3 つの成分。D はよく知られている座標系の回転を関係づける行列である。

ここで，もっと一般的な解析をしてみよう。ある無限小回転に対する行列を知っていたとする。たとえば，z 軸のまわりの 1°の回転である。そうすると，z 軸のまわりの n°の回転は

$$D(z\ 軸のまわりに\ n^\circ)=[D(z\ 軸のまわりに\ 1^\circ)]^n$$

†厳密に言えば，2 つの場合に回転したあとの振幅が同一であるとの保証はない。絶対値 2 乗したものだけが等しくなる。振幅は位相因子だけ違ってもよい。しかし，ウィグナー（E. P. Wigner）は D を定義し直して位相因子が消せることを示した。

で表現できる。一般に，D(z 軸のまわりに $\varepsilon°$) を知っていれば，

$$D(z\text{ 軸のまわりに }\theta°)=[D(z\text{ 軸のまわりに }\varepsilon°)]^{\theta/\varepsilon}$$

となる。ここで，ごくわずかだけ回転したとすると，ほぼ恒等変換に近いので，ε の 1 次で D(z 軸のまわりに ε)$=1-i\varepsilon M_z$となる†。同様に

$$D(x\text{ 軸のまわりに }\varepsilon)=1-i\varepsilon M_x$$

$$D(y\text{ 軸のまわりに }\varepsilon)=1-i\varepsilon M_y$$

となる。

したがって有限回転の場合は，D(z 軸のまわりに θ)$=(1-i\varepsilon M_z)^{\theta/\varepsilon}$となるので，2 項展開を使い，$\varepsilon\to 0$ とすると

$$D(z\text{ 軸のまわりに }\theta)=1-i\theta M_z-\frac{\theta^2}{2!}M_z{}^2+i\frac{\theta^3}{3!}M_z{}^3+\cdots$$

となるが，これは $e^{-i\theta M_z}$と書かれることが多い。M_zは加法や乗法に対し普通の数のようにふるまうので，2 項展開が使えるのである。

単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ で表される任意軸のまわりに ε だけ回転したければ，

$$D(\boldsymbol{v}\text{ のまわりに }\varepsilon)=1-i\varepsilon(v_xM_x+v_yM_y+v_zM_z)$$

となり，$\boldsymbol{v}$ のまわりに有限な θ の場合には

$$D(\boldsymbol{v}\text{ のまわりに }\theta)=\exp[-i\theta(v_xM_x+v_yM_y+v_zM_z)]$$

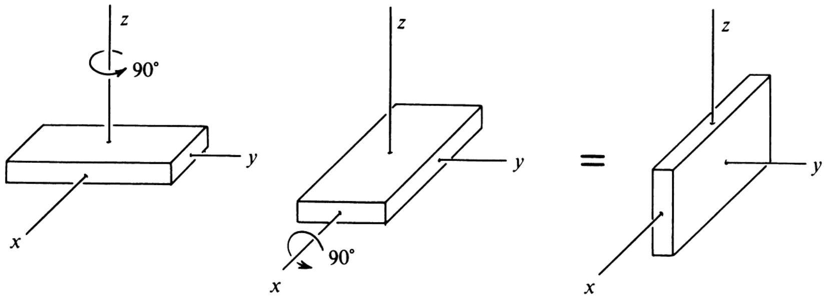
となる。しかし，ここでは展開項の中に積として出てくる M_x，M_y，M_zの相対的な順番には注意しなければならない。というのはこれらの行列は交換しないからである。有限回転は交換しないという事実がこの原因なのである。図 3-4(a)，(b) に示すように，消しゴムの回転を考えてみよう。(1) z 軸のまわりに 90°回転し，それから x 軸のまわりに 90°回転する（図 3-4a)。(2) x 軸のまわりに 90°回転し，それから z 軸のまわりに 90°回転する (図 3-4b)。2 つはまったく異なる結果となる。

M_xと M_yの交換関係を求めてみよう。図 3-5 に示すように，まず x 軸のまわりに ε，次いで y 軸のまわりに η，それから x 軸のまわりに$-\varepsilon$，そして y 軸のまわりに$-\eta$ だけ回転する操作を考えてみよう。

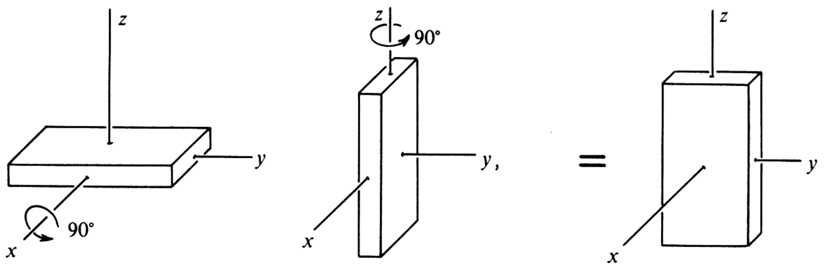
回転し始めるとき y 軸上にある点の動きを追ってみる。明らかにその結果

---

†このことは z 軸のまわりに対象を角 ε だけ回転することを意味するが，座標系を$-\varepsilon$ だけ回転することと同等である。



〈図 3-4a〉

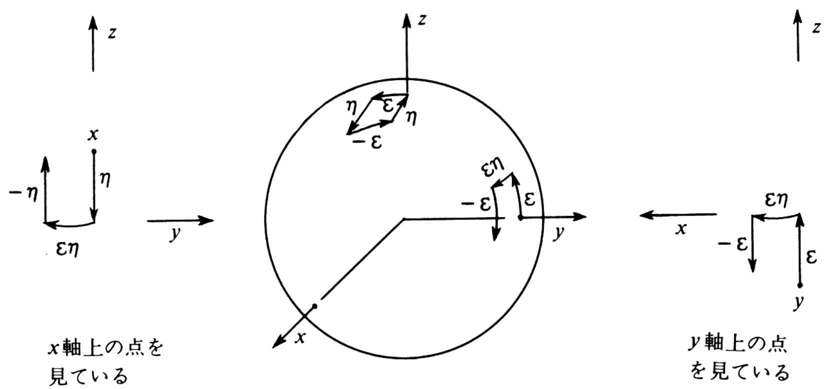


〈図 3-4b〉

は2次の効果となって現れる。終わりの点はちょうど x 軸に向かって $\varepsilon\eta$ だけずれている†。また，z 軸上にある点は元の位置に戻ることがわかるので，球面上の点の正味のずれは，ちょうど z 軸のまわりに $-\varepsilon\eta$ の角だけ回転したものとなる。2次までの項をとると，

$$[1+i\eta M_y-\eta^2(1/2)M_y^2][1+i\varepsilon M_x-\varepsilon^2(1/2)M_x^2][1-i\eta M_y-\eta^2(1/2)M_y^2]$$
$$\times[1-i\varepsilon M_x-\varepsilon^2(1/2)M_x^2]=1+i\varepsilon\eta M_z$$

†〔訳注〕図 3-5 では半径 1 の単位球上にある点の回転を考えている。したがって x 軸が球表面と交差する点の動きは，左側に描かれているように，第 1 回の回転では不変，2 回目は長さ 1 のベクトルを y 軸のまわりに η だけ回転するから，x 軸の負方向に η だけずれる。また 3 回目は x 軸のまわりだから，変化後のベクトルの x 成分は不変で，z 成分である図に示した長さ η の線分が $\varepsilon\eta$ だけずれる。最後は y 軸のまわりだから長さ 1 の線分の回転となるから，ずれは η であり，結果は y 軸の負方向に $\varepsilon\eta$ のずれとなる。



〈図 3-5〉

となる。$\varepsilon\eta$ の係数を集めると

$$M_xM_y - M_yM_x = iM_z$$

となることがわかる。同様に

$$M_yM_z - M_zM_y = iM_x$$

$$M_zM_x - M_xM_z = iM_y$$

となる。これが行列 M_x，M_y，M_zの交換関係である。すべてのものはこの交換関係から導ける。どうすればよいかは多くの教科書（たとえば，シッフ）に詳しく説明されている。ここではほんの大筋だけを紹介する。まず，$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M^2$は，すべての M と可換であることを証明する。そして，k をある定数として，$M^2a = ka$ を満たす a を選ぶ。

$$M_- = M_x - iM_y$$

をつくると

$$M_zM_- = M_-(M_z - 1)$$

となることがわかる。ここで，m をある数として，$a^{(m)}$が

$$M_za^{(m)} = ma^{(m)}$$

を満たすものとしよう†。そこで，$b = M_-a^{(m)}$とすれば，

†〔訳注〕M^2と M_zは可換であるから，同時固有ベクトル $a^{(m)}$が存在する。

$$M_z b = M_z M_- a^{(m)} = M_-(M_z - 1)a^{(m)}$$
$$= (m-1)M_- a^{(m)}$$
$$= (m-1)b$$

となる。したがって

$$b = ca^{(m-1)}$$

であることがわかる。すべての m について $a^{(m)}$を

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^{(m)*} a_n^{(m)} = 1$$

と規格化する。すると，

$$1 = (1/c^*c)\sum_n (M_- a^{(m)})_n^* (M_- a^{(m)})_n$$
$$= (1/c^*c)\sum_n a_n^{(m)*}(M_+ M_-)a_n^{(m)}$$

となる。ここで $M_+ = M_x + iM_y$である。ところで，

$$M_+ M_- = M_x{}^2 + M_y{}^2 + M_z$$
$$= M^2 - M_z{}^2 + M_z$$

であり，

$$M^2 a^{(m)} = ka^{(m)}$$

でもある。したがって，

$$c = [k - m(m-1)]^{1/2}$$

となる。“最後”の状態を $m = -j$ としよう。M_-を作用させても，他に状態ができないようにするにはどうすればよいであろうか？　それは唯一，$M_- a^{(-j)} = 0$，つまり $m = -j$ で $c = 0$ のときに限るので，$k = -j(-j-1) = j(j+1)$ となる。

まったく同様な手続きで（M_-が m を 1 だけ下げるように，1 だけ上げる M_+を使って），最大の m を $+j'$とすると，$k = j'(j'+1)$ となるのがわかるので，$j = j'$となる。したがって $2j$ は整数であり，全状態数は $2j+1$ となる。

例

(1) 状態数 1：$j = 0$

(2) 状態数 3：$j = 1$

m	変換のしかた
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)$
0	z
-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)$

(3) 状態数 2：$j=1/2$。この場合はきわめて興味深い。

$$a^{(1/2)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$a^{(-1/2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

としよう。一般的規則によって，

$$[j(j+1)-m(m-1)]^{1/2}=[(1/2)(3/2)-(1/2)(-1/2)]^{1/2}=1$$

だから

$$M_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$M_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$$

を得る。したがって

$$M_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

となる。同様に

$$M_z\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1/2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$M_z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-1/2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

であり，したがって

$$M_z=1/2\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

となる。また，

$$M_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることも示せるので,

$$M_x = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1/2)\,\sigma_x$$

$$M_y = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = (1/2)\,\sigma_y$$

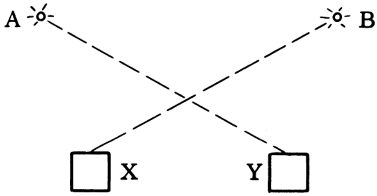
$$M_z = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1/2)\,\sigma_z$$

と書くことができる。この表記は3個の重要な2×2行列であるパウリ行列 σ_x, σ_y, σ_zの定義として使える。また, $\sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2 = \sigma_z{}^2 = 1$, $\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$ が成立することを確かめておくこと。この主要なポイントは, 無からすべてが出てきたということである。つまり, 自然は何ら特別な軸を選んでいないし, 重ね合わせの原理の性質だけが唯一採用した仮定である。

しかしながら, 1つだけきわめて重要な仮定をしている。つまり, 生成と測定の過程ははっきりと分離されており, その間の対象を規定する振幅については議論できるとする。装置と測定器間の距離がいかに近かろうとも, (特に場の理論の場合には) いつでもこのことは仮定されている。装置と測定器があまりにも接近し過ぎていれば, この仮定は成立しないことがわかろう。

もう1つの重要な仮定は, 力学的な干渉は無視したことである。つまり, 生成と測定の装置の間には, たかだか対象が移行することで規定されるようなもの以外の力は存在しないとしている。そのときは2つの独立事象に対する振幅もひとつひとつの事象の振幅の積となる。

2つの恒星A, Bと測定器X, Yの例を見てみよう(図3-6)。Bで放出された光子が測定器Xに到着する振幅を $a_{B\to X}$, Aで放出された光子が測定器Y



〈図3-6〉

に到着する振幅を $a_{B\to Y}$ とすると，2つの事象とも起こる確率は $a_{B\to X} \times a_{B\to Y}$ となる。

4
角運動量の合成則

Rules of Composition of Angular Momentum

スピン 1/2 状態は 2 つの振幅で規定される。一般に $a = a_+(1/2) + a_-(-1/2)$ であり，(1/2) は $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，(−1/2) は $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$a$ は $\begin{pmatrix}a_+\\a_-\end{pmatrix}$ を表す。

たとえば，x 軸に沿って上向きスピンに対応する

$$M_x a = (1/2)\,a$$

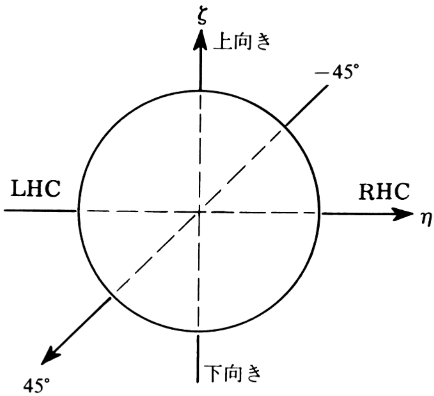
の解は

$$a = (1/\sqrt{2})(1/2) + (1/\sqrt{2})(-1/2)$$

である。同様に，x の下向きは $(1/\sqrt{2})(1/2) - (1/\sqrt{2})(-1/2)$；$y$ の上向きは $(1/\sqrt{2})(1/2) + (i/\sqrt{2})(-1/2)$；$y$ の下向きは $(1/\sqrt{2})(1/2) - (i/\sqrt{2})(-1/2)$ となる。実際どのような状態でも，どこかある一定の方向を向いているスピンを表していることが示せる。

2 個の複素数を持つ系は何であれスピン 1/2 状態に類似している。たとえば光の偏極を考えてみよう。ちょっと狂気じみているが，x 偏極を 3 次元空間のある軸 ζ のスピン上向きに，y 偏極をスピン下向きとしよう。残りの 2 軸を ξ, η と書く。すると，ξ 軸の上向きスピン＝45°の偏極；ξ 軸の下向き＝−45°の偏極；η 軸の上向き＝RHC（右回り円偏光）；η 軸の下向き＝LHC（左回り円偏光）となる。この空間の原点を中心とする半径 1 の球面を描くと（図 4-1），任意の偏極はこの表面上の 1 点で表現できる。

一般的な偏極は楕円偏光に対応する。1/4 波長板（移相子）を透過した光はある角度だけ回転する。光の偏極と 3 次元空間の向きとの関係は，はるか昔ストークスによって調べられた。たとえば，メーザーのような過程を例にこのことを理解するとたいそう役に立つ。（メーザーは電場中にアンモニア分子



〈図 4-1〉

の系を置き，2 つの状態間に遷移を起こさせることを利用した装置である。この系の分析をより簡単に理解するには，スピン 1/2 の電子についての普通の空間と同じように，任意の時刻のアンモニア分子の状態をある空間の 1 つの方向として表現するとよい。)

角運動量の合成則

A，B という 2 粒子を生成する装置を考えよう。A 粒子はスピン 1 をもち，$m=+1,\ 0,\ -1$ の 3 状態を，B 粒子はスピン 1/2 をもち，$m=1/2,\ -1/2$ の 2 状態をとるとする。A の 3 状態ひとつひとつに対して B は 2 つとれるので，2 粒子合わせて 6 状態が可能となる。

原子核のまわりを回転する電子を考えればよい。この結合系をどのように特徴づけられるか？　状態ψ_Aとψ_Bに作用する行列 M_A と M_Bがある。すると，

$$(1-i\varepsilon M_z)\psi_A\psi_B=(1-i\varepsilon M_{z_A})\psi_A(1-i\varepsilon M_{z_B})\psi_B$$
$$=[1-i\varepsilon(M_{z_A}+M_{z_B})]\psi_A\psi_B$$

つまり，

$$M_z=M_{z_A}+M_{z_B}$$

となる†。

†より正確には，I_Aと I_Bを A, B 状態に対する恒等行列として，$M_z=M_{z_A}I_B+M_{z_B}I_A$である。

結合系の状態を表 4-1 に示す。6 状態があるので，$j=5/2$ という結論に跳びそうである。しかし，$m=\pm 5/2$ の値がないし，$m=\pm 1/2$ は 2 度現れている。

〈表 4-1〉

m_A	m_B	m
1	1/2	3/2
0	1/2	1/2
1	−1/2	1/2
0	−1/2	−1/2
−1	1/2	−1/2
−1	−1/2	−3/2

実際，$M^2=(M_A+M_B)^2$ は 2 つの j の値をとる：

$$j=3/2 \qquad m=3/2,\ 1/2,-1/2,-3/2$$

および

$$j=1/2 \qquad m=1/2,\ -1/2$$

$j=3/2$，$m=3/2$ の状態は明らかに $(+1)(1/2)$ である。しかし，どの状態が $j=3/2$，$m=1/2$ に対応するのか？

$$M_-(m)=[j(j+1)-m(m-1)]^{1/2}(m-1)$$

であることを思い出そう。すると，

$$M_-=M_-^A+B_-^B$$

$$M_-(1/2)=(-1/2)$$

$$M_-(-1/2)=0$$

$$M_-(1)=\sqrt{2}\,(0)$$

$$M_-(0)=\sqrt{2}\,(-1)$$

$$M_-(-1)=0$$

であるから，

$$M_-(1)\,(1/2)=\sqrt{2}\,(0)\,(1/2)+(1)\,(-1/2)$$

そして

$$M_-(3/2,\ 3/2)=\sqrt{3}\,(3/2,\ 1/2)$$

となる。したがって，

$$(3/2,\ 1/2)=(\sqrt{2}/\sqrt{3})\,(0)\,(1/2)+(1/\sqrt{3})\,(1)\,(-1/2)$$

〈表 4-2〉

m	$j=3/2$	$j=1/2$
$3/2$	$(1)(1/2)$	
$1/2$	$(1/\sqrt{3})[\sqrt{2}(0)(1/2)+(1)(-1/2)]$	$(1/\sqrt{3})[-(0)(1/2)+\sqrt{2}(1)(-1/2)]$
$-1/2$	$(1/\sqrt{3})[\sqrt{2}(0)(-1/2)+(1)(1/2)]$	$(1/\sqrt{3})[(0)(-1/2)-\sqrt{2}(-1)(1/2)]$
$-3/2$	$(-1)(-1/2)$	

〈表 4-3〉

m	$j=1$ (対称)	$j=0$ (反対称)
1	$(1/2)(1/2)$	
0	$(1/\sqrt{2})(1/2)(-1/2)+(1/\sqrt{2})(-1/2)(1/2)$	$(1/\sqrt{2})(1/2)(-1/2)-(1/\sqrt{2})(-1/2)(1/2)$
-1	$(-1/2)(-1/2)$	

〈表 4-4〉

m	$j=2$ (対称)	$j=1$ (反対称)
2	$(+1)(+1)$	
1	$(1/\sqrt{2})[(+1)(0)+(0)(+1)]$	$(1/\sqrt{2})[(+1)(0)-(0)(+1)]$
0	$(1/\sqrt{6})[(+1)(-1)+(-1)(+1)+2(0)(0)]$	$(1/\sqrt{2})[(+1)(-1)-(-1)(+1)]$
-1	$(1/\sqrt{2})[(-1)(0)+(0)(-1)]$	$(1/\sqrt{2})[(0)(-1)-(-1)(0)]$
-2	$(-1)(-1)$	

m	$j=0$ (対称)
2	
1	
0	$(1/\sqrt{3})[(1)(-1)+(-1)(+1)-(0)(0)]$
-1	
-2	

となる。(1/2, 1/2) は (0)(1/2) と (1)(−1/2) の線形結合を作って求められるが，(3/2, 1/2) とは直交する。こうして表 4-2 に与えられている結果が得られる。

その他の例：表 4-3 には 2 個のスピン 1/2 の状態を，表 4-4 には 2 個のスピン 1 の状態を追加した。同じ角運動量を 2 個加えると，最高状態は対称に，次は反対称に，……となる。

●

問題 4-1 スピン 1 の角運動量を 3 個加えてみよ。完全対称状態を求めよ。どのような全角運動量ができるか？

5

相対性

Relativity

読者は皆，ローレンツ変換はよく知っているだろう。z 軸に沿っての運動では，2 つのローレンツ座標系間での変換式は

$$z' = (z - vt)(1 - v^2)^{1/2} = z \cosh u - t \sinh u$$

$$t' = (t - vz)(1 - v^2)^{1/2} = t \cosh u - z \sinh u$$

$$x' = x \qquad y' = y$$

となる。ここで $c=1$ とおき，［専門家が“ラピディティ (rapidity)”と言っている］物理量 u を

$$\tanh u = v/c$$

で導入した。

変換式の 2 番目の形は虚数角の回転に等価であることに注意してほしい。同一方向の変換に対しては，ラピディティは加法的である。つまり，系 1 と 2 の間のラピディティが u，2 と 3 の間が v であれば，系 1 から 3 への変換はラピディティ $w = u + v$ で与えられる。異なる方向に対する変換は可換でない。あらゆるローレンツ変換（回転も含めて）の集合は群をなす。

●

問題 5-1　3 次元空間にスピン 1/2 を持つ物体があるとしよう。あるいは，

$$a = \mathrm{col}[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$$

で記述される，より一般的な状態を考えよう。ローレンツ変換をすると，どうなるか？

ヒント：前に回転に際して起こったことと同様である。時間があれば，規格化の問題も考えてみよ。

●

$t^2-x^2-y^2-z^2$という量が不変であることを思い出してほしい。次のような表記を導入しよう。x_μは成分 $x_4=t$，$x_1=x$，$x_2=y$，$x_3=z$ を持つベクトルである。もしベクトル $a_\mu=(a_4, a_1, a_2, a_3)$が x_μと同じように変換するなら，a_μを4元ベクトルという。たとえば，

$$E'=(E-vp_3)/(1-v^2)^{1/2}, \text{ etc.}$$

で変換するとして，$p_\mu=(E, \boldsymbol{p})$ は4元ベクトルである。

2個の4元ベクトル a_μ，b_μの4次元不変スカラー積は

$$a\cdot b\equiv a_\mu b_\mu=a_4b_4-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3$$

である。次のような量を導入する。

$$\begin{aligned}\delta_{\mu\nu}&=1 & \mu&=\nu=4\\ &=-1 & \mu&=\nu=1,\ 2,\ 3\\ &=0 & \mu&\neq\nu\end{aligned}$$

$\delta_{\mu\nu}a_\nu=a_\mu$となることに注意†。さらにまた，

$$\nabla_\mu\equiv(\partial/\partial t, -\nabla)$$

も導入する。

役に立つ不変量は $p\cdot p=E^2-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=m^2$である。計算で不変量を上手に使えば，ローレンツ変換をせずに済ませることが多い。簡単な例として p-p 散乱を考えよう：陽子-反陽子対を生成するのに必要な最低エネルギーはいくらか？

---

†〔訳注〕この記述は正しくない。普通は共変ベクトル a^μと反変ベクトル a_μを区別し，その間の関係をつける計量として $g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$を定義する。そして不変スカラー積は $a\cdot b=g^{\mu\nu}a_\mu b_\nu=a_\mu b^\mu=a_4b_4-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3$であり，また $g^{\mu\nu}b_\nu=b^\mu$である。



$\mathcal{E}^2-\boldsymbol{p}^2=(4M)^2$という関係がある（ここで$\mathcal{E}$は系の全エネルギー）。これより，$(E+M)^2-\boldsymbol{p}^2=16M^2$だから $E=7M$ が得られる。したがって必要な最低の運動エネルギーは $6M\simeq5.6\mathrm{GeV}$ である。

波動

エネルギー-運動量 p_μを持つ粒子は波動 $\varphi=u\exp(-ip_\mu x_\mu)=u\exp[-i(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})]$ と関連していることを知っている。この波動の位相がローレンツ変換のもとで不変なことは直ちにわかる。実際，ド・ブロイ (L. V. de Broglie) がエネルギー-運動量と波長-振動数との間の関係式を見いだしたのはこの方法であった。問題 5-1 は u がどう変換するのかを調べることであった。また，

$$\nabla_\mu\varphi=-ip_\mu\varphi$$

であることに注意せよ。

正エネルギーと負エネルギー

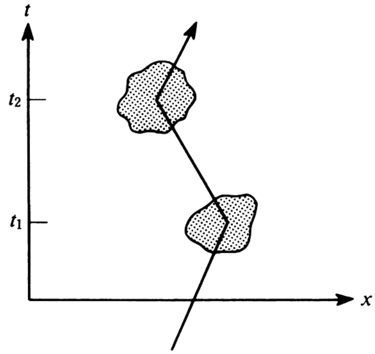
式 $E^2=m^2+p^2$ は 2 つの解

$$E=\pm(m^2+\boldsymbol{p}^2)^{1/2}$$

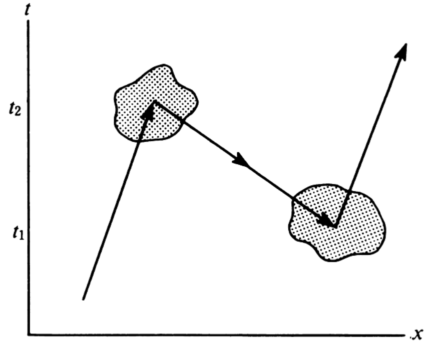
を持つ。2 つの解ともまじめに考えなければならないことを注意したい。正の振動数，また負の振動数によって記述されている粒子のあることがわかる。$E>0$ では $\varphi\sim\exp(-iEt)$ であり，$E=-W$，$W>0$ では，$\varphi\sim\exp(iWt)$ となるが，これらはそれぞれ，粒子と反粒子に対応する。

図 5-1 のように古典的粒子の散乱を時空図で表そう。（影をつけた部分は外部ポテンシャルの存在を示し，これによって粒子が散乱される。）

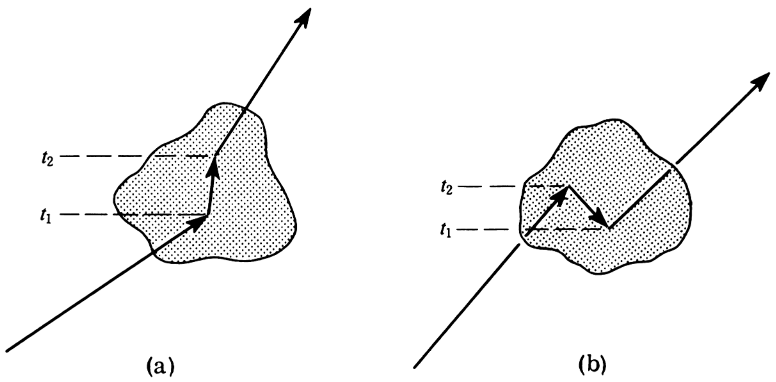
ここで，ちょっとの間だけ，軌跡（あるいは，むしろ，量子力学での波動）



〈図 5-1〉



〈図 5-2〉



〈図 5-3〉

が**時間的に逆行**できるとすると何が起こるかを想像してみよう！　図 5-2 にその状況を示す。通常はこの過程を以下のように見る（図 5-3 を参照）：$t<t_1$では入射粒子だけがある。t_1では外部ポテンシャルによって電子-陽電子対が作られる。t_2では入射電子によって陽電子が消滅し，その結果 $t>t_2$では散乱された電子だけが存在する。しかし，こう考えるよりも，散乱の概念を一般化し，電子が t_2から t_1へと時間的に逆行して散乱されていると考えたい。そうすると，通常の陽電子は時間的に逆行する電子となる。そして，2 つの“2 重散乱”の過程の違いは，電子の世界線をたどるときに，連続する散乱の時間順序だけとなる。（このように解釈すると，未来から情報が得られること

を意味するのではと思うかもしれない。しかし，詳しく検討すると，因果律は破られていない。)

さて，このような見方をすると，負エネルギーの困難がどう整理されるかを見てみよう。始状態（過去）と終状態（未来）について話そう。**入口**状態と**出口**状態（時間とは関係ない）を導入する。行列要素 $\chi^* M\varphi$ で，φ は入口状態，χ は**出口**状態である。**入口**状態と**出口**状態を決めるには，時間に逆行せざるを得なくても粒子の世界線をたどればよい。図 5-3 の陽電子を考えると，t_2での散乱は出口状態であるが，陽電子の始状態を使わなければならない。たとえば，電子散乱に対する行列要素は

$$\int \Psi^*_{\text{final}} M \Psi_{\text{initial}} dV$$

であるのに対し，陽電子散乱に対しては

$$\int \varphi^*_{\text{initial}} M \varphi_{\text{final}} dV$$

となる。したがって，完全な規則は次のようになる。

電子：行列要素の入口状態は始状態であり，行列要素の出口状態は終状態である；

陽電子：行列要素の入口状態は終状態であり，行列要素の出口状態は始状態である。

簡単な具体例：電子が行列の部分にあるエネルギーを与えるとしよう。すなわち，$E_{\mathrm{i}}=E_{\mathrm{f}}+\omega>E_{\mathrm{f}}$。このとき，行列要素は

$$\exp(iE_{\mathrm{f}}t)\exp(i\omega t)\exp(-iE_{\mathrm{i}}t)$$

という時間依存性を持つ。[つまり，M はエネルギーをもらえば，$\exp(i\omega t)$ のように変化することがわかった。]

次に陽電子の場合を考えよう：$\exp(-iEt)=\exp(iWt)$である。もし陽電子がもとのように（まちがい！）扱われていると，時間依存性は

$$\exp(-iW_{\mathrm{f}}t)\exp(i\omega t)\exp(iW_{\mathrm{i}}t)$$

となり，$W_{\mathrm{f}}=W_{\mathrm{i}}+\omega$，つまり，この過程によってエネルギーが作られてしまう！

しかし，正しいやり方に従えば，

$$\exp(-iW_1 t)\exp(i\omega t)\exp(iW_1 t)$$

つまり，$W_1=W_f+\omega$となり，好ましいように，M の部分によってエネルギーが差し引かれ，陽電子が損失している。

もっと複雑な場合が考えられる：たとえば，電子-陽電子対が消滅する振幅は

$$(1)\quad \int \varphi^*_{\text{initial positron}} M \varphi_{\text{initial electron}}\, dV$$

であるのに対して，対生成の振幅は

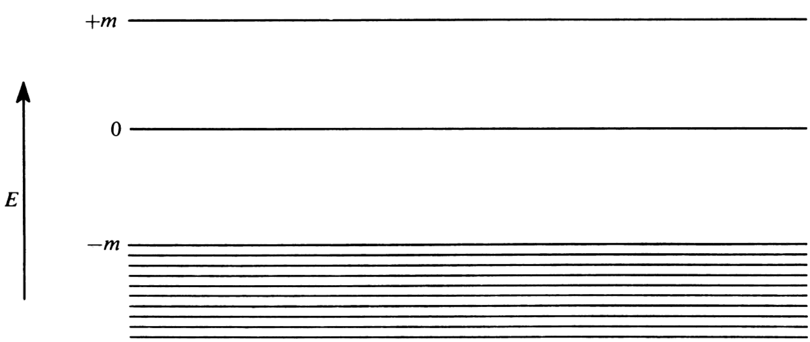
$$(2)\quad \int \varphi^*_{\text{final electron}} M \varphi_{\text{final positron}}\, dV$$

となる。

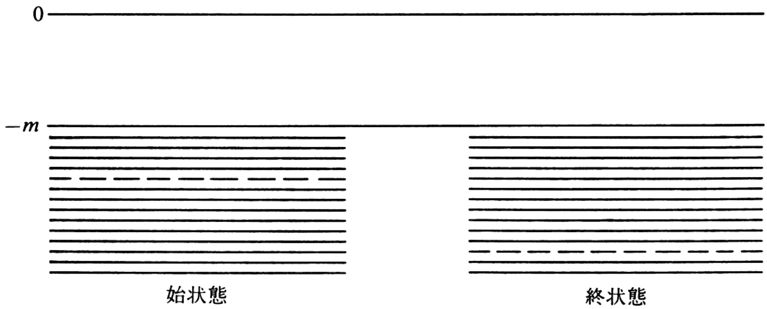
容易にわかることであるが，たとえば M がエネルギーを吸収するなら，(1) で M がすべてのエネルギーを吸収するのに対し，(2) はゼロとなる。

負エネルギー状態の解釈はディラック（P. A. M. Dirac）によって初めて与えられたが，電子が負エネルギー状態へ落ち込むのを避けるために排他原理を利用した(図 5-4)。彼によれば，すべての負エネルギー状態は$-mc^2$まで詰まっている。そしてこの無限の海は観測不可能である。しかし，海の中の泡のあること，つまり，泡に対応する負エネルギー状態の電子の欠如はわかる。この泡が陽電子なのである。

たとえば，陽電子散乱を考えよう：陽電子はどのようにして別の状態へ移れるか？　ある電子が始状態のホールを埋め，その電子が飛び出した状態に



〈図 5-4〉



〈図 5-5〉

ホール（陽電子）†が創られる（図 5-5）。この過程の行列要素は

$$\int \varphi^*_{\mathrm{initial}} M \varphi_{\mathrm{final}} dV$$

となり，時間を逆にした議論によって得られた結果と同じである。

電子の無限の海を取り扱う必要がないこの方法はなかなか便利である。しかし，ボース粒子の場合は，100 万年たっても海は満たせない。パウリとワイスコップ（V. Weisskopf）によって，クライン-ゴルドン（Klein-Gordon）方程式が正しく扱われるようになるには，量子力学の発見から 8 年を必要とした。ボソンの負エネルギー状態をどう解釈するかの方法はディラック理論とは完全に違っており，第 2 量子化のアイデアを含む（Pauli and Weisskopf[6]）。しかし，彼らの方法もよく見れば，反粒子では単に入口と出口の状態の役割を反対にするという我々の規則と等価である。

［第 6 章から 14 章までは，本質的に，ファインマンとゲルマン（R. P. Feynman and M. Gell-Mann）のストレンジ粒子に関する未発表の紹介論文の内容である。］

†しかし，もちろん，エネルギー $-E$，運動量 $-\boldsymbol{p}$ を持っている。

6
電磁的結合およびフェルミ結合

Electromagnetic and Fermi Couplings

昔から，少数の要素を数限りなく多様に組み合わせて，あらゆる自然を説明しようと試みられてきたが，今日我々がどのような立場にあるかを述べてみたい。それも，特に，何が要素であるかということについてである。高エネルギー実験で思わぬ結果が多数見いだされ，これらの要素に関する我々の認識が不完全であることが明らかになった。これらの材料を部分的に選別する際に，最も有効であった理論的アイデアについて述べよう。主にアイデア自体を述べ，その起源，あるいはその発展の歴史について注意深く論ずる時間はなかろう。しかし，現在ものごとはどうなっているのかだけにはふれよう。その際，その文意には，“もちろんまったく違うようになるかも知れないが，しかし…，”という前置きがつくべきなのであろう。我々の現在の知識が脆く，不完全であることや，壮大な多様の可能性のあることはよく知っているが，いつでもそれらを引き合いに出さざるをえないとするなら，危なっかしい説明となる。これからの話は世界中の研究の概観であり，著者たちの新しい仕事の報告ではない†。

物質の多数の形態や多様なふるまいは，一定の方法で相互作用をしている限定された数の基本粒子によって記述されるように思える。それらの基本粒子は量子力学の一般原理と相対論の原理に従う。これらの原理，すなわち場の量子論の原理によれば，粒子以外には何物も存在しない。粒子は内在する性質である静止質量とスピンを持ち，粒子間では結合によって規定された相互作用をしている。

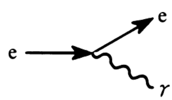
---

†〔訳注〕185 ページの補注“フェルミ結合とワインバーグ-サラム理論”を参照。

電磁的結合

たとえば，光は静止質量 0，スピン 1 の光子という粒子で表せる。励起原子からの光子放出は基本的結合の結果として表せる。すなわち，$e \to e, \gamma$ (e は電子，γ は光子）という過程であるが，電子が光子と電子に“なりうる”という可能性のある（より正確には数学的量である振幅で記述される）ことを意味する。この結合の正確な法則（問題にしている粒子の運動方向とスピンにどう振幅が依存するか）は（少なくとも 1GeV 以下のエネルギー領域まで）きわめて正確にわかっている。原子中の電子がこの相互作用をするときには，原子が光を放出する。ひとつひとつの過程は，それに相当する振幅で逆過程が存在する。つまり，矢印は両方の向きを持っているのである。この逆は光の吸収で起こる。

$$e \longleftrightarrow e, \gamma$$



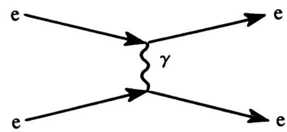
(6-1)

これらの関係式は両方を向いた矢印，あるいはダイアグラムによって表されるが，その際，図の線分は入射，あるいは出ていく粒子を表している。ダイアグラムは（6-1）式の右側に書いた。

1 個の自由粒子はエネルギー・運動量の保存のため，光子は放出できないが，2 電子が相互にきわめて接近すれば，一方が光子を放出し，他方が直ちにそれを吸収することが可能となる。量子力学では，もし持続するとエネルギーが保存しなくなるような状態でも，一時的に存在しうる。放射性元素における障壁の透過の例がよく知られている。電子間の相互作用で光子が交換されるこの効果はわかっており，電気的な逆 2 乗の斥力である。したがって，電子間の電気的・磁気的力はもちろん，電子による電波，光そして X 線の放出，散乱と吸収はすべて単純な (6-1) の法則によって厳密にそして詳細に記述できるのである。これに関わるあらゆる解析は，量子電気力学と呼ばれている。

エネルギー保存則を一時的に破ることによってのみ起こりうるものを，仮想的過程と呼ぶ。仮想的光子交換による電子相互作用のダイアグラムは

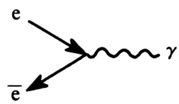
e, e $\longleftrightarrow$ e, e　　関接的過程　　(6-2)



である。実粒子（出入りする2個の電子）だけが開端の線で描かれており，仮想的光子はその両端が基本的結合（6-1）によって結ばれている。

現実に，時間反転できることに関連して，もう1つの原理がある。つまり，あらゆる粒子にはその反粒子が存在するのである。(光子のように，中性粒子の中には反粒子が粒子と同一のものもある。) この法則は式の中で粒子を反対側の辺に移し，反粒子に変えればよい。反電子は陽電子であるから，(6-1) は

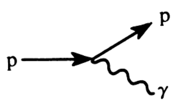
e, $\bar{\mathrm{e}}$ $\longleftrightarrow$ γ



となることを意味しており，実際，対消滅と対生成は (6-1) によって完全に規定できる。e, γ $\longleftrightarrow$ e のように光子を（6-1）の反対の辺に移しても（6-1）と同じ式を表すだけである。というのは，光子は実際上反粒子を持たない，あるいはもっと正確には光子の反粒子は光子自身であるからである。

そのほかの基本的粒子も光子と結合する。たとえば，p が陽子を表すとすると，

p $\longleftrightarrow$ p, γ　　(6-3)



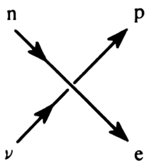
となる。このようにできる粒子は“荷電している”と呼ばれる。電荷 e の数値について2つの著しい法則があるが，いずれもよくはわかっていない。1つはあらゆる基本的な粒子が同一の大きさの電荷を持っていることである（しかし正，負の違いはある)。もう1つは，任意の反応におけるすべての結合で粒子の全電荷がけっして変わらないことである。最後になるが，電荷 e の値は，比をとって無次元量として測って，$e^2/\hbar c = 1/137.039$ である。この数は電子と光子の相互作用(6-1)の強さと呼ばれているものの大きさを与えるが，その値や起源もまた神秘的なものである。その大きさは経験的に決定された

ものである。1/137 は小さな数なので，電気力学はかなり弱い相互作用であるといえよう。

フェルミ結合

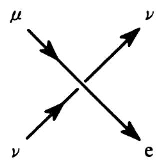
電気力学の他に，原子核の β 崩壊を説明するために必要なもっと弱いフェルミ結合がある。たとえば，中性子 n が $n \to p, e, \bar{\nu}$ のように陽子，電子，反ニュートリノに崩壊するのは

$$\bar{p}, n \longleftrightarrow \bar{\nu}, e \qquad (6\text{-}4)$$



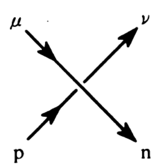
という結合の直接的な結果であると考えられており，これはフェルミ結合と呼ばれる。また，弱い相互作用とよばれることも多い。他の例のフェルミ結合は，ちょうど電子のような荷電粒子であるが，質量が 208.8±1 倍もあるミューオン μ の崩壊，$\mu \to e + \nu + \bar{\nu}$,

$$\bar{\nu}, \mu \longleftrightarrow \bar{\nu}, e \qquad (6\text{-}5)$$



である。3 番目のフェルミ結合は原子核によるミューオン捕獲 $\mu + p \to n + \nu$,

$$\bar{\nu}, \mu \longleftrightarrow \bar{p}, n \qquad (6\text{-}6)$$



の原因である。これ以外の明らかな例は，ストレンジ粒子のゆっくりした崩壊の場合であり，のちほど議論する。

7

フェルミ結合とパリティ非保存

Fermi Couplings and the Failure of Parity

特徴的なのは，前章の 3 例ひとつひとつの結合の強さが等しいように見えることである。その大きさは定数 G で与えられ，$GM^2/\hbar c=1.01\pm0.01\times10^{-5}$ である。ここで無次元の比とするため，陽子質量 M を導入した。きわめて小さいことがわかる，つまり非常に弱い結合である。ニュートリノ(質量 0，スピン 1/2)に関しては，知られているのがフェルミ結合だけであり，したがって，この粒子と物質の相互作用は非常に小さく，ニュートリノの検出はきわめて困難である。

フェルミ結合の詳細な形は 1957 年に確立された。これは，物理法則の鏡映対称性の原理（パリティ保存則としても知られている）を破ることが特徴的である。

ひとつひとつの物理過程には，その鏡映過程が存在する（あるいは，原理的に存在しうる）と長い間信じられてきた。したがって右手系あるいは左手系の区別は相対的なもの，つまり，絶対的な意味では定義できないと思われていた。もちろん，歴史的な効果（たとえば，地球の回転の観念）は除外しなければならない。というのは，これらは初期条件が特別に選ばれているためである。もし，我々以外の銀河系の住人にある装置を作るよう詳細な仕様を電波で送っても，その住人は鏡映した形の装置を組み立てるかも知れない。それは，右，左の私たちの使い方を伝えようがないからである。電磁力あるいは核力に関わる実験では，すべて完全にこのような見方を支持していた。

量子力学では，この概念はパリティと呼ばれる状態の性質に関係していた。ある装置が対象を状態 φ にし，鏡映の装置が鏡映の対象を状態 φ' にするとしよう。重ね合わせの原理から，P を線形演算子として，

$$\varphi' = P\varphi$$

となる。しかし，位相因子は別にして

$$P\varphi' = \varphi$$

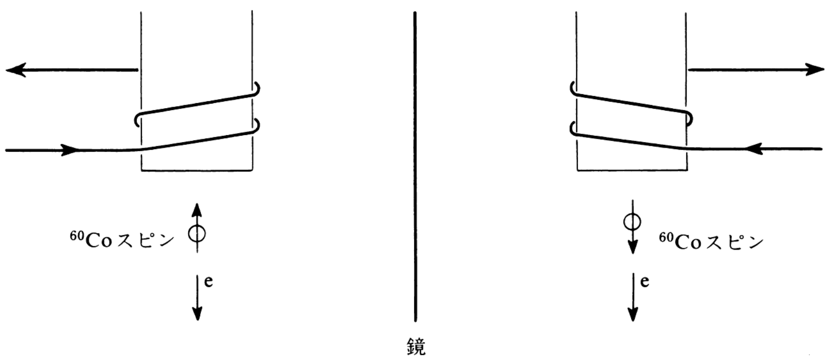
である。したがって $P^2=1$ となり，2つの可能な状態

$$\varphi \xrightarrow{\text{鏡映}} +\varphi \quad \text{偶パリティ}$$

$$\xrightarrow{\qquad\quad} -\varphi \quad \text{奇パリティ}$$

がある。鏡映対称性の原理から，系はある決まったパリティ状態をとり続けなければならない。

しかしながら，1957年のはじめごろ，ヤン(C. N. Yang)とリー(T. D. Lee)の示唆に従って，この原理を破る一連の β 崩壊実験が行なわれた。図7-1に示された^{60}Coの実験を考えよう。^{60}Coスピンは極低温で磁場をかけ，向きがそろえられており，それからの放出電子の角分布が観測された。その結果，電子は^{60}Coスピンの逆方向に出やすいことがわかった。しかしながら，この原理が破られていないとすると，鏡映実験では電子は^{60}Coスピンと同方向に放出されやすいことになり，合わせるとスピンの両方向へ出やすくなる。したがって，鏡映実験の物理過程は実際上存在しえないのである。もしそうであれば，銀河系外の人間に右，左の区別の仕方を電波で送れることになろう。



〈図 7-1〉

磁場をかけて^{60}Co の向きをそろえ，電子が出やすい逆方向で磁場の向きを定義せよと言えばよい。しかし，彼が反物質でできており，反-^{60}Co を使い，陽電子を観測していたらどうなるであろうか？　現在のところ，彼は左手系の規則でやっていくものと信じられる。すなわち，物質を反物質に替えれば，鏡に映した世界は可能であると考えている。したがって，反-^{60}Co からの陽電子は磁場と平行向きに放出されよう。

重力

これらの結合以外に，もう 1 つ，さらに弱い結合である重力がある。重力の法則は古典極限では完全によくわかっているが，場の量子論の概念はいまだに完全でなく，満足できるほど適合されているわけではない。しかし，究極的には完成されるものとすれば，電子間の重力が電磁力の 10^{-39}ほども小さくなる結合定数で，あらゆる粒子に普遍的に結合する粒子（質量 0，スピン 2 の重力子）があるだろう。

核力

これらの重力，フェルミ結合，電気力学の結合以外に，もっと強いものがあるはずである。核子を原子核の中にいっしょに結合させている力は，きわめて強く，何か別の方法で記述されなければならない。これから論じたいのは，この強い結合，そしてそのようにふるまう粒子である。電子，ミューオン，ニュートリノ（これらはまとめてレプトン，あるいは“弱い相互作用をする粒子”と呼ばれる），そして光子や重力子，これらには強い結合はない。強い結合をする粒子は“強い相互作用をする粒子”と呼ばれ，バリオン（重粒子，これには中性子や陽子が含まれる）およびメソン（中間子）である。（専門的にはミューオンはメソンとは考えられていない。）

もちろん電子を原子核のまわりに保っておく力は，簡単な電気的な引力であり，(6-1) と (6-3) をいっしょにした陽子と電子間の仮想光子交換から出てくる。しかし，原子核は強い引力でいっしょに結合されている中性子と陽子の粒子群から構成されている。

この核力は，原子核の研究や陽子による中性子や陽子散乱によって非常に

注意深く調べられてきた。それは電気的な力よりずっと強いだけでなく，はるかに複雑であることがわかった。実際，思ってもいなかったちょっとしたことを除けば，ほとんど可能な限りの複雑さを呈しているといえるほどである。逆2乗の力ではなく，短距離ではきわめて強い斥力であり，少し大きな距離では引力で，10^{-13}cmを過ぎると急速に落ちていく。この力は，pとnの相対的なスピンの方向，そして，これらのスピン方向と2粒子を結ぶ直線との関係に依存する。さらに，粒子の速度やそれとスピン方向との関係（スピン-軌道結合）に依存する。しかし，思ってもいなかったちょっとしたことが1つある。それは，pとp，pとn，nとnの間の力が，実際上すべて等しいように見えることである。もちろん，pとpの間には電気的な力もあるが，pとnの間には対応するものがない。しかし，全体の力は核力に電気力を加えたものであることを認めれば，これらの粒子がそれぞれの状態をとることに対応して，p-p力，p-n力，n-n力の核力部分はすべて等しいといってもよいのである。

アイソスピン

したがって，強い核力の起源は，粒子が陽子であるか中性子であるかには関わらないようなある種の対称性（アイソスピン対称性と呼ばれる）を持っている。中性子と陽子の静止質量のわずかな差は，おそらくは，これらの粒子のまわりの電磁場に関係した質量である。

最初にレッスンをしてみよう。強い相互作用をする粒子は組分けできる。核子は，陽子と中性子2個の組である。核子1個は陽子と中性子の2つの状態をとるという。これらの状態は同一のエネルギーを持つ。これは，ある軸に沿ってスピン“上向き”と“下向き”をとる電子の2スピン状態の類推であり，磁場がなければ2つのスピン状態は同一のエネルギーを持っている。

実際，物理学者たちはスピン1/2の系の研究から，2-状態系の量子力学についてよくわかっており，完全な類推で，核子の2-状態は架空の3次元空間におけるスピン1/2物体の“上向き”と“下向き”状態を表していると言いたいのである。この空間はアイソスピン空間と呼ばれる。核子はアイソスピン1/2を持つという。アイソスピン空間の軸が任意方向にとれると仮定すれ

ば，力が等しいことが導ける。普通の空間では軸を任意に選べることから，角運動量の保存が出てくる。したがって，強い結合は対応する保存則，全アイソスピンの保存則を満足する。

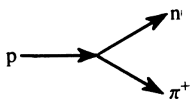
スピン 0，1/2，1，3/2，…は順に 1，2，3，4，…個の状態を持つので，3 粒子がセットを作ればそれはアイソスピン 1 を持つなどという。したがって，これらの粒子が陽子と中性子間の対称性を保つように，あるいはより一般的に，アイソスピン対称性を保つともいえるようにするには，どのように結合すればよいのか，それを決めるために，異なる角運動量の状態を結合する規則が使えるのである。

これは強い結合だけに適用できる。電気力学のような比較的弱い相互作用では，アイソスピンの保存則は破れる。もちろん，陽子と中性子では光子についての結合がまったく異なる。

パイオン-核子結合

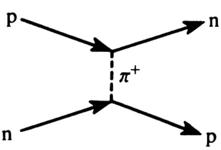
このアイデアを示すために，湯川が示唆したように，核力は (6-2) と類似の過程で生じるとしよう。ただし，そこには電子の代わりに核子があり，光子の代わりに何か別のものがある。これを試みてみよう。

$$\mathrm{p} \longleftrightarrow \mathrm{n},\ \pi^+$$

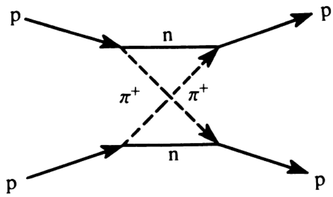


(7-1)

のような(6-1)に類似した基本過程があるとしよう。ここで π^+ は新しい粒子，正のパイオンを表し，電荷保存則を満たすために正電荷を持っている。ここで，

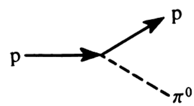


のように，π^+ を仮想的に移行させると，陽子と中性子間に力が生じるであろう。(ついでに言えば，p と n が入れ換わるので，交換力と呼ばれる。) しかし，2 個の陽子の間でも，2 個のパイオンを



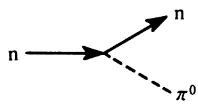
のように交換させて，(7-1)式で力を作れる。しかし，2個の交換からの力は1個の交換からの力と同じ答を与えない。そこで2個の陽子に対し，1個のパイオンを交換する何らかの方法があるはずである。中性のパイオンがあり，

$$\mathrm{p} \longleftrightarrow \mathrm{p},\ \pi^0 \tag{7-2}$$

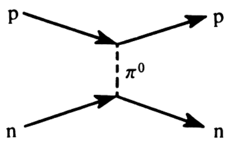


のような過程がなければならないし，中性子に対しては

$$\mathrm{n} \longleftrightarrow \mathrm{n},\ \pi^0 \tag{7-3}$$

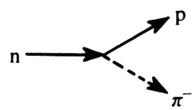


でなければならない。この新たな可能性によってn-p力も変わり，



という非交換部分が加わる。少し計算すると，(7-1)が正しいと，(7-2)，(7-3)，(7-4) のすべてが必要となるが，(7-1) と (7-4) の振幅（電荷の類推であるが，パイオンの結合）は両方とも (7-2) の$\sqrt{2}$倍に等しく，(7-3) は (7-2) に等しいが，逆符号でなければならない。そうすると核力の対称性，(p, p) = (p, n) = (n, n) はあらゆる場合に，そしてどんなに多数のパイオンが交換されようとも正しくなる。

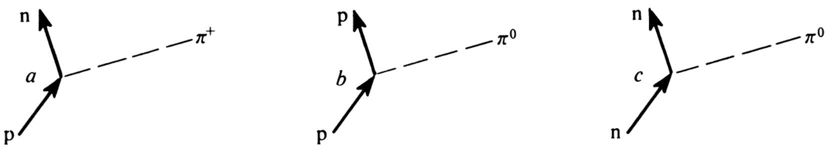
$$\mathrm{n} \longleftrightarrow \mathrm{p},\ \pi^- \tag{7-4}$$



8
パイオン-核子結合

Pion-Nucleon Coupling

3 種の基本的相互作用

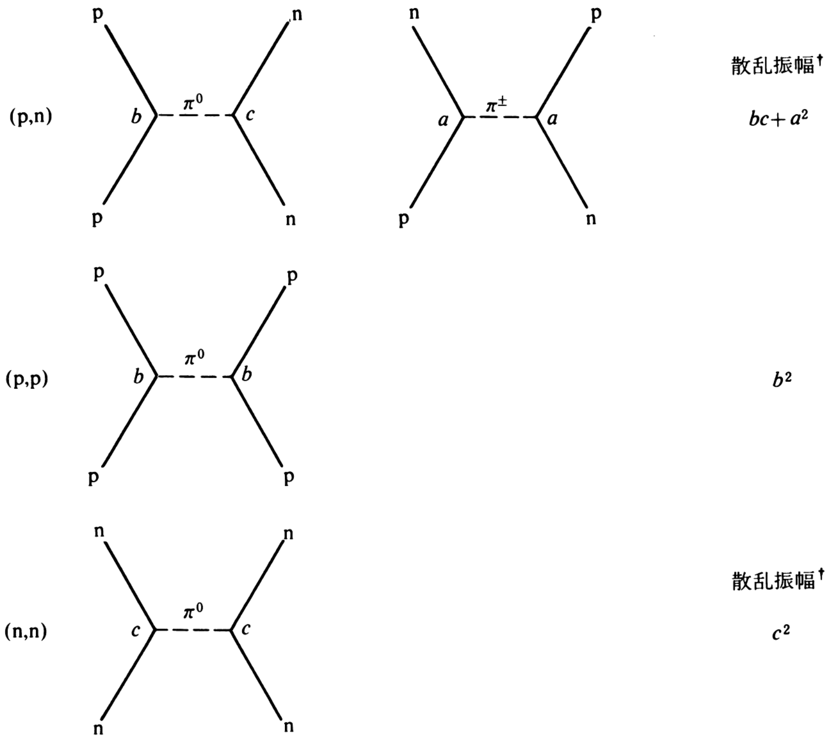


を仮定する。ここで，順に a，b，c は過程 (1)，(2)，(3) に対する振幅であり，とりうる核子間の状態で核力が (p，p)＝(n，n)＝(p，n) と対称的になるように結合定数 a，b，c を決定したい。最低次で図 8-1 の過程がある。したがって，$bc+a^2=b^2=c^2$でなければならない。もし $b=c$，$a=0$ であるとすると，荷電パイオンと核子の間に相互作用がなくなり，実験事実と反する。そのため，

$$b=-c, \qquad a=(2b^2)^{1/2}$$

となる。$a=-(2b^2)^{1/2}$という選び方もあるが，パイオンの位相を変えたものであり，ともかく選び方は任意である。

しかし，この結果は別の方法でも容易に求められる。もし，3 重項のパイオン (π^+，π^0，π^-) があれば，それはアイソスピンが 1 である。$N \to N+\pi$ という反応で (N で中性子と陽子を総称した核子を表すことにする)，1 個の核子である左辺はアイソスピン 1/2 をもつ。右辺は($p\pi^+$) ($p\pi^0$) ($p\pi^-$) ($n\pi^+$) ($n\pi^0$) ($n\pi^-$) と 6 個の状態を持つが，これらは 2 重項と 4 重項とに分けられる。というのは，1 個のアイソスピン 1/2 の核子と 1 個のアイソスピン 1 のパイオンを結合させて，アイソスピン 1/2 と 3/2 を作れるからである。強い結



〈図 8-1〉

合でアイソスピンが保存されるなら，右辺の状態もアイソスピン 1/2 でなければならず，角運動量結合の規則の類推で，

$$\mathrm{p} \longleftrightarrow (\mathrm{p}, \pi^0) - \sqrt{2}\,(\mathrm{n}, \pi^+) \tag{8-1}$$

$$\mathrm{n} \longleftrightarrow (\mathrm{n}, \pi^0) - \sqrt{2}\,(\mathrm{p}, \pi^-) \tag{8-2}$$

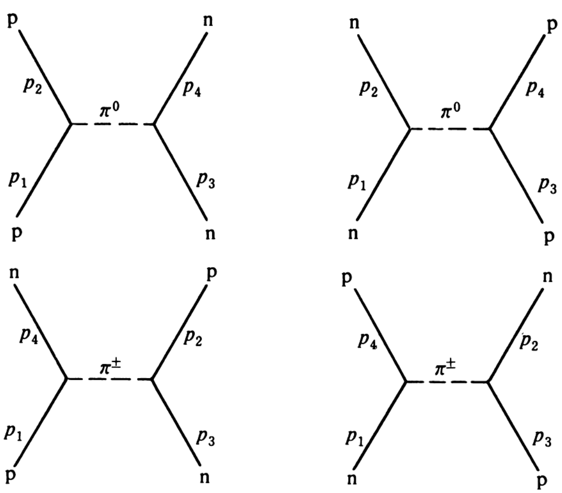
となり，各係数がそれらの状態の振幅を与える。確率は 2 乗なので，核子とパイオンが正電荷のアイソスピン 1/2 状態にあるのなら，2：1 の割合で p と π^0 よりも n と π^+ である確率が大きい。

これらの π メソン，あるいはパイオンは実際に発見された。スピン 0 を持つ。π^+ と π^- は等しく電子の 276 倍の質量を持っているのに対し，π^0 はわずかに違い，電子の 268 倍である。違いはおそらくは単に荷電パイオンの付加的な電気的エネルギーであろう。電気力学の修正を取り入れれば，結合定数に

ついてアイソスピン対称性から導けることはすべて証明されている。

ところで，核力は核子間のパイオン交換から正しく導けるであろうか？これを行なうと，深刻な事態が発生する。強い結合の効果は任意の精度で計算することができないのである。したがって，核力を正しく計算して，結合(8-1)，(8-2) の仮説と一致するかどうかを調べることはできないのである。1個のパイオン交換から出てくる力，あるいは2個，もちろん3個やそれ以上のパイオンから出てくる力のあることは知られていた。1個の交換からの力は簡単に計算できるし，2個，…は少々むずかしいが，計算できる。しかし，それらの和がどうなるかはまったくもってわからないのである。電気力学でも1個，2個の光子の交換からの力があるが，余分にもう1個光子が交換されるダイアグラムからの寄与の振幅は $e^2/\hbar c$，つまり 1/137 倍だけ小さくなる。したがって主な寄与は1個の光子交換であり，2個の光子交換，…はわずか数パーセントの修正にしか過ぎない。そこで，急速に減少する級数を計算する

† 最初の過程で振幅を加えなければならないのは，少し奇妙に見えるかもしれない。(p, n) 系を（p, p)，(n, n) 系と比較するには，ラベルの入れ換えのもとで対称な（p, n）状態を考えるべきである。そうすると，



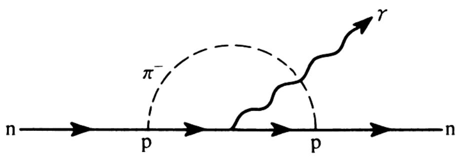
となり，2つの場合とも同一な初期状態と終期状態間の遷移に対応するので，我々の規則ではこれらの振幅を加える必要がある。

ことになる(摂動展開という)。しかしメソンでは光子の結合定数 e に対応する結合定数 g は $g^2/\hbar c=15$ である。これはきわめて大きく，“強い”結合という専門用語の意味は正しいが，摂動展開ができない。

一般的な定理，アイソスピン対称性，そして分散理論（信号は光速より速くは伝わらないという原理に結び付く関係式で，ここでは取り上げない）などを工夫して多くのことが試みられた。現在では，強い結合を含むものはたいていが計算できないとだけ言っておこう。これらの強い結合についての研究が停滞していることは深刻な問題である。強い結合については，場の量子論の枠内で論理的に無矛盾な可能性がないのではという，深刻な疑問すら存在するのである†。

間接的相互作用

入り組んだ種類の問題の例として，中性子と光子の相互作用を考えよう。実験的に 1 つのことがある。中性子が 磁気能率を持っており，それが 100 万分のいくつか程度であることが知られている。しかし，それでもなお直接的な中性子-光子結合はないと仮定できる。というのは，(7-4)によって中性子は仮想状態で荷電粒子に変換でき，そうすれば光子と直接的に相互作用できるからである。1 つの可能性は図 8-2 で表されるが，もっと多くのメソンを含む，より多くのダイアグラムが存在しよう。そのため磁気能率は計算できず，いまの理論のテストとして，この見事な磁気能率の測定結果を使えない。我々のできることは，このような中間過程によって，パイオンや核子の電気的な性質，そして崩壊の性質を定性的に説明することだけである。



〈図 8-2〉

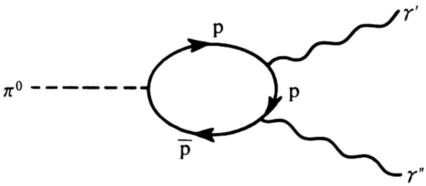
†〔訳注〕185 ページの補注“標準理論について”参照。

荷電パイオンと中性パイオンは，その崩壊の仕方に著しい違いがある。π^0 はきわめて急速に（$<10^{-15}$sec）2 個の光子に崩壊する。アイソスピン対称性から

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma \tag{8-3}$$

π^+に対して同様な過程があるとはいえない。実際，その過程は電荷保存から不可能である。(8-3) は電磁相互作用であるので，この場合アイソスピン対称性は失われる。(8-3) は陽子と反陽子の仮想的な対を経由した結果として説明したい：

$$\begin{aligned}\pi^0 &\to \bar{p} + p \\ &\to \bar{p} + p + \gamma' \\ &\to \gamma'' + \gamma'\end{aligned}$$



最初は強い結合（7-3）の結果であり，次は（6-3）によって 1 個の陽子 p が γ'で表された光子を放出し，それからまた (6-3) によって 2 番目の光子 γ''を放出して核子どうしが消滅する。(2 個の光子は必要である。さもないと，最後で運動量とエネルギーが保存されなくなる。)

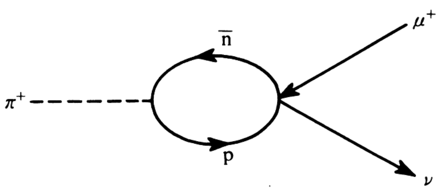
不幸にも，最初の段階で強い相互作用があるので，この割合も計算できない。π^+ははるかにゆっくり崩壊する。2.6×10^{-8}sec の寿命で μ^+と ν に崩壊する。

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu \tag{8-4}$$

(予想されるように，反粒子 π^-は同じ寿命で μ^-と $\bar{\nu}$ に崩壊する。)

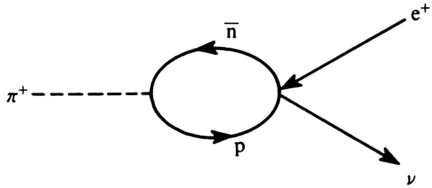
これは仮想的な過程

$$\begin{aligned}\pi^+ &\to \bar{n} + p \\ &\to \mu^+ + \nu\end{aligned}$$



を通しての間接的な結果であろう。そしてまた，崩壊

$$\begin{aligned}\pi^+ &\to \bar{n} + p \\ &\to e^+ + \nu\end{aligned} \qquad (8\text{-}5)$$



も期待できる。ここで再び強い結合が含まれるので，直接割合は計算できないが，(8-4) と (8-5) の割合の比率は計算できる。パイオンの崩壊の生成物の中に $\mu^+\nu$ でなく，$e^+\nu$ を見つけるのは 7400 のうちに 1 つである。このことは最近実験的に（$\pm 15\%$の精度で）確立された。

9

ストレンジ粒子

Strange Particles

パイオンと核子に強く結合する粒子は他にもある。7，8年前，宇宙線中に新粒子が発見された。たとえば，pとπ^-に崩壊する中性粒子である（いまではΛと呼ばれている）：

$$\Lambda \longrightarrow p+\pi^- \qquad (9\text{-}1)$$

最近の測定によれば，電子の2182倍の質量を持ち，寿命は2.619×10^{-10}secである。これは強い相互作用にとっての普通の時間に比べて非常に長い（核の中のとなりの核子に光がとどく時間は10^{-23}secである）。したがって，この崩壊はおそらくβ崩壊と同じく弱い反応である。強い結合に限定するならば，

$$\Lambda \longleftrightarrow p,\ \pi$$

という結合はないことになる。これは強い相互作用としては禁止されるのである（もしそうでないとすると，(9-1) は非常に速く進行することになる)。

しかしそうすると，Λはどうして作られるのであろうか？　宇宙線は高速の陽子から構成されており，原子核に衝突するが，原子核は陽子，中性子，それに強い結合 (6-4) を通して仮想的なパイオンを含んでいる。実験的にはΛがきわめて豊富に生成されるので，強い結合を通してでなければならない。$p+\pi^-\rightarrow\Lambda$ではありえない。この反応は，上で見たように強い結合ではない。$p+n\rightarrow\Lambda+p$のようなものでもない。というのは，これは，$\Lambda\rightarrow p+n+\overline{p}$が強い結合であることを意味し，(7-4) から$\overline{p}+n\rightarrow\pi^-$が強い結合となり，反応 (9-1) が強い結合となってしまうからである。また，

$$n+n+n\rightarrow\Lambda \qquad (9\text{-}2)$$

のような反応も不可能である。実際に不可能なのだが，(9-1) が弱くても，

$$n+n+n\longrightarrow\Lambda\longrightarrow p+\pi^-\longrightarrow n$$

という仮想的反応を経由して，原子核中の3個の中性子が1個の中性子に変化する可能性があることになる。これによって，2個の中性子の静止質量という大量のエネルギーが解放されることになり，また，水素以外の原子核は安定でありえなくなる。炭素片のような物質はきわめて安定である。物質の崩壊を調べようとする微妙な実験はいままで成功しておらず，いわゆる安定核は少なくとも10^{17}年の寿命を持っていることが知られている。

このことから，結合を決めるときに用いる原理として他のものが考えられる。弱いとか強いとかの結合があるのではなく，それらをいっしょに考えて，核子が何か軽いものに変わったり，崩壊したりすることができるのである。つまり，Λの崩壊によって1個の陽子が生成されるので，Λが生成されるには1個の核子が消費されるはずである。これを見失わないようにする最も簡単な方法は，粒子それぞれに，その中に“隠れている”核子数を持たせることである。つまり，もっと正確に言うと，最終崩壊生成物の中に現れる正味の陽子数である(反陽子は負と勘定する)。この数はまだ一般的に認められた呼び方がないが，核子荷電†という名が提案されている。Λの核子荷電は，p，nと同じように1である。電子，あるいはπメソンは核子荷電0であり，反陽子の核子荷電は−1である。1以上の核子荷電をもつ基本粒子は知られていない。

したがって，あらゆる結合は**常に核子荷電を保存しなければならない**という原理が出てくる。

随伴生成　Kメソン

この種の議論から，強い生成過程では(たとえば$n+n \to \Lambda+\Lambda$のように)，一度に1個以上のストレンジ粒子が創られなければならない。実際宇宙線中には他の粒子も発見されており，たとえば，いまではK^0メソンあるいは中性ケイオンと呼ばれる中性粒子は，2個のパイオンに

$$K^0 \to \pi^+ + \pi^- \tag{9-3}$$

と崩壊し，10^{-10}secの寿命を持つ。電子質量の966倍の質量を持ち，明らかに

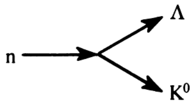
---

†〔訳注〕現在では重粒子数（baryon number）という。

核子荷電は0である。この過程もゆっくり崩壊するので，これが生成されるときには，Λと同じ問題が出てくる。

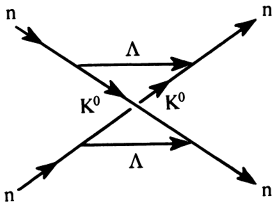
パイス (Pais) とゲルマンは，ΛとK^0はいっしょに創られなければならず，生成反応は

$$n \longleftrightarrow \Lambda,\ K^0 \qquad (9\text{-}4)$$



のような強い結合の結果であるということを提案した。その後，核子が衝突したとき，これらの粒子がいっしょに生成されることが直接証明された。

しかし，陽子に対する (9-4) のような強い結合が核力に影響を及ぼすであろう（図 9-1 を参照)。そのため，陽子に対する同じような結合がない限り，



〈図 9-1〉

n-n の力と p-p の力のバランスが失われる。Λに対する同じような荷電粒子（ほとんど同じ質量の粒子）は存在しないように思えるので，

$$p \longleftrightarrow \Lambda,\ K^+ \qquad (9\text{-}5)$$

のような結合のあることが期待されたが，実際，K^0に対応する荷電粒子K^+が初めて宇宙線中に発見された。質量は電子の 967 倍である。アイソスピン(8-1，8-2)の言葉で言えば，左辺の核子はアイソスピン 1/2 なので，もしアイソスピンが保存されるのなら，右辺の全アイソスピンは 1/2 でなければならない。Λは1重項であり，アイソスピンは0であるから，K はアイソスピン 1/2 の 2 重項でなければならず，2 通りの状態があることになる。

その強い結合 (9-5) は (9-4) のK^0と同様であり，［(9-3) と同様な］崩壊

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0$$

が起こるが，K^+の寿命は 1.2×10^{-8}sec とK^0に比べきわめて長く，弱い崩壊が

アイソスピン対称性を持っていないことの現れである。

この他にも，宇宙線中には迷うほど豊富に粒子が発見されている。これらの材料をまとめる手がかりは，“強い結合はそのような粒子を対にして含んでいる”というアイデアを新しい原理に定式化することであった。

ストレンジネス

K^0は核子やパイオンが持っていない新しい荷電を持っていると考え，この荷電は強い結合で創られたり，壊されたりはできないとしよう。すると，K1個だけを強い相互作用で創ることはできないが，もし Λ がこの荷電－1を持つとすれば，Λ は K といっしょに創ることができる。この荷電は“ストレンジネス”と呼ばれている。K^0と K^+はストレンジネス1を持ち，Λ はストレンジネス－1を，核子とパイオンはストレンジネス0をもつ。強い結合の両辺では全ストレンジネスがつり合わなければならない。弱い結合では［(9-3) の過程が存在することから示されるように］ストレンジネスは変われる。

このような考えから，ゲルマンと西島は独立にストレンジ粒子に関する我々の知識をまとめる枠組みを提案し，それらの間に成り立つ多くの関係式を予言した。この枠組みを使えば，化学元素の周期律表と同じように，今日あると思われているような強い相互作用をする粒子は記述できよう。

バリオン

最初に核子荷電1の粒子を考えよう。1つのグループとしてハイペロンと呼ばれるものがある。これらは表 9-1 に載せてある。Σ^0の存在はこの枠組みによってその存在を，そしてまた，きわめて短時間で光子を放出して Λ に崩壊すると予言された。そのすぐあとに発見されたが，その通りであった。電子質量の2584倍の付近にストレンジネス－2の2重項($T=1/2$)Ξ^0，Ξ^-がある。Ξ^-，つまりカスケード粒子は，すでに宇宙線実験で知られていた(最近，研究所の高エネルギー加速器でも創られた)。Ξ^-はゆっくりと(ほぼ 3×10^{-10} sec) Λ と π^-に崩壊する。これは，Ξ^-のストレンジネスを－2と仮定することによってのみ説明できる。実際，2個の K メソンが Ξ^-といっしょに創られているのが観測されている。Ξ は2重項であるべきだということは，ゲルマンと

〈表 9-1〉

アイソスピン T	電荷 −	電荷 0	電荷 +	ストレンジネス
1/2	Ξ^-	Ξ^0		−2
1	Σ^-	Σ^0	Σ^+	−1
0		Λ		−1
1/2		n	p	0
質量順に書くと,				
1836 の質量付近に 2 重項（$T=1/2$）の核子 n, p				0
2182 の質量に中性の 1 重項（$T=0$）の Λ				−1
2330 の質量付近に 3 重項（$T=1$）の Σ^-, Σ^0, Σ^+				−1

西島によって示唆されたストレンジネス・チャージとアイソスピンとの関係，つまり，**ストレンジネス S は多重項の平均電荷 q の 2 倍から核子荷電 N を引いたものである**という関係から導かれる。だから，核子荷電 1 のハイペロンでは，$S=2q-1$ である。$S=-2$ であるから Ξ 多重項の平均電荷は $-1/2$ となり，2 重項でなければならない。Ξ^0の存在が予言されたが，最近発見された。

反バリオン

これらのハイペロンそれぞれに対して，核子荷電−1 の反粒子が存在するはずである。反粒子の図表は正確に同じであり，同じ質量の粒子だが，電荷とストレンジネスが反対である。これらのうち，反中性子 $\bar{\mathrm{n}}$，反陽子 $\bar{\mathrm{p}}$，そしてごく最近，反ラムダ $\overline{\Lambda}$ が研究所で人工的に創られた。

メソン

次は核子荷電 0 の強く結合する粒子である（一般的にメソンという）。表 9-2 に示す。π^+と π^-は互いに反粒子であり，π^0はそれ自身が反粒子である。しかし，ケイオン K^+, K^0はストレンジネス +1 を持つので，それらの反粒子はストレンジネス −1 を持たねばならない。特に，ストレンジネスがそれぞれ 1 と −1 の 2 種の中性ケイオンがなければならない。

以上が現在，存在すると一般的に認められている粒子のすべてである。解

〈表 9-2〉

アイソスピン T	電荷 −	電荷 0	電荷 +	ストレンジネス
1/2	K^-	$\overline{K^0}$		−2
1/2		K^0	K^+	+1
1	π^-	π^0	π^+	0
質量順に書くと,				
276 の質量付近に 3 重項 ($T=1$) のパイオン π^+, π^0, π^-				0
965 の質量付近に 2 重項 ($T=1/2$) のケイオン K^0, K^+				+1
およびその反粒子（$T=1/2$）のケイオン $\overline{K^0}$, K^-				−1

釈が謎として残されている宇宙線事象はきわめて少ないが，これらはまだ他の粒子が存在する証拠である。ある研究所で電子質量の 500 倍近くの粒子の存在の証拠が宇宙線で発見されたが，いまのところ，この粒子を確認しようとする他の試みは失敗に終わっている。反ハイペロンのいくつかを除いて，これらすべての粒子は実験的に確立されている。

●

問題 9-1　重水素における K 捕獲 K+D →ハイペロン+パイオン+核子の実験が行なわれた。表 9-3 に与えられたデータが使える。いまのところ Λ を Σ^0 と区別できない。

アイソスピン保存則がテストできるか？

できるだけ多くのことを，そして，特に Λ と Σ^0 が区別できるとしたときの結果に対する予言をせよ。

〈表 9-3〉

生成物	観測事例数
$\Sigma^+ N\pi^-$	44
$\Sigma^- N\pi^+$	55
$\Sigma^- p\pi^0$	7
$\Lambda^0 p\pi^-$	48 (2 つ合わせて)
$\Sigma^0 p\pi^-$	
$\Lambda^0 N\pi^0$	72 (2 つ合わせて)
$\Sigma^0 N\pi^0$	

10

ストレンジネスからの結果

Some Consequences of Strangeness

ストレンジネスとその強い相互作用における保存の概念によって多くの予言がなされたが，どの1つも実験で破られたことはない。実験材料を整理するのにきわめて忠実に役に立っている。たとえば，Λ や Σ が核衝突で生成されるときには，K^0あるいはK^+も1個生成されなければならないというものがある。$n+n \to \Lambda+\Lambda$ のような生成反応は2個の Λ の全ストレンジネスが-2であり，中性子のは0であるから，不可能である。

他の例では，K^-粒子は，飛んで行って核に衝突すると Λ を創れるが，K^+は創れない。

中性ケイオンの崩壊

パイスとゲルマンはこのストレンジネスの歴史で最も素晴らしい予言の1つを行なった。それは反対のストレンジネスを持つ2種の中性K粒子，K^0とその反粒子$\overline{K^0}$が存在するはずであるという予言に関係している。ところで，K^0は2個のパイオンに崩壊するらしく，たとえば

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- \qquad (9\text{–}3)$$

という崩壊が観測されている（寿命はほぼ10^{-10}sec)。もちろん，弱い相互作用がそうであるように，これはストレンジネスを破る。反粒子は同じ確率で対応する反粒子に

$$\overline{K^0} \longrightarrow \pi^- + \pi^+ \qquad (10\text{–}1)$$

と崩壊する。(9–3）と（10–1）の崩壊生成物はもちろん同一である。その結果，非常に興味深い量子力学的干渉効果が現れる。(9–3）があることは，複雑な仮想過程を経由してであるが，K^0が π^+，π^-になる何がしかの振幅，x が

ある：

$$K^0 \longleftrightarrow \pi^+,\ \pi^- \qquad \text{振幅}\ x \qquad (10\text{–}2)$$

また，粒子と反粒子の関係から，反粒子に対する振幅は

$$\overline{K^0} \longleftrightarrow \pi^+,\ \pi^- \qquad \text{振幅}\ x \qquad (10\text{–}3)$$

と同じでなければならない。(厳密に言えば符号が反対かも知れないが，どの可能性でも結果は同じである。)

ここで K^0でも $\overline{K^0}$でもない粒子状態で，むしろ，等しいが反対符号の振幅で K^0と $\overline{K^0}$である粒子状態を重ね合わせた系を考えてみよう；この状態を K_2^0と呼ぶ：

$$K_2^0 = (1/\sqrt{2})K^0 - (1/\sqrt{2})\overline{K^0} \qquad (10\text{–}4)$$

[確率(振幅の 2 乗) は K^0に対して 1/2，$\overline{K^0}$に対して 1/2 であるから，振幅は $1/\sqrt{2}$ でなければならない。] そうすると，この K_2^0の状態にある粒子は π^+と π^-に崩壊できないことになる。というのは，そうなるべき振幅は (10–2) と (10–3) から，$[(1/\sqrt{2})x - (1/\sqrt{2})x] = 0$ となってしまうのである。

もちろん，状態

$$K_1^0 = (1/\sqrt{2})K^0 + (1/\sqrt{2})\overline{K^0} \qquad (10\text{–}5)$$

は振幅$\sqrt{2}\,x$ で崩壊する。

したがって，崩壊を記述するのに使う適切な状態は K_1^0と K_2^0であり，前者は 2 個のパイオンに崩壊できるが，2 番目の方はできない。これらの 2 つの状態は寿命も非常に異なるし，崩壊生成物も違う。(K_2^0はたとえば，3 個のパイオンに崩壊し，2 個のパイオンに崩壊する K_1^0の少なくとも 100 倍も長い寿命を持っていることがわかっている。) しかし，ケイオンが，たとえば Λ といっしょに創られるときには，はっきりしたストレンジネス－1 を持っている。つまり，それは K^0であり，K_1^0でも K_2^0でもない。すなわち，

$$K^0 = (1/\sqrt{2})K_1^0 + (1/\sqrt{2})K_2^0 \qquad (10\text{–}6)$$

であるが，この式は (10–4) と (10–5) をたすことによって直接導ける。

したがって，確率の 1/2 が崩壊を分析するには適切な状態である K_1^0，1/2 が K_2^0となる。そのため，新しく創られたケイオンが崩壊するときには，半分だけが短い寿命 10^{-10}sec で 2 個のパイオンに崩壊するはずである。残りはもっと長い寿命 10^{-8}sec を持ち，3 個のパイオンに崩壊するはずである。すなわ

ち，中性ケイオンは崩壊生成物が2組あり，2つの異なる寿命を持つはずであるという驚くべきことが予言されたのである。現在これは証明されている。もう1つの予言も証明されている。K^0はストレンジネス＋1を持っているので，核に衝突してΛを創ることはできない。しかしながら，K^0ビームのソースから充分離れ，K_1^0がほとんど確実に崩壊してしまうなら（しかし，K_2^0がはっきりとわかる程度まで崩壊してしまっているほどには離れていない），ビームはほとんど純粋のK_2^0の状態になっているはずである。しかし，そこでは(10-4）によってストレンジネスは確定していないが，ストレンジネス−1のK^0の振幅は存在し，その値は$-1/\sqrt{2}$，したがって確率は1/2となる。その結果，ケイオンビームが核に衝突してもΛを創ることができる。このΛ生成は現在，実験的に証明されている。

全般的なことで，ストレンジネスが生成時の＋1からビームのはるか下流でどうして−1に変わったのであろうか？　との質問があろう。答は，まず(10-2)，次いで（10-3）の逆という，仮想過程を通してである。ストレンジネスの破れはきわめて弱い結合x^2によってであり，実際その通りなのだが，K^0と$\overline{K^0}$の質量が等しいため共鳴が可能になり，この過程の振幅が小さくても，次第に積み重なって大きな効果となるのである。

これは理論物理学の最も偉大な成功の1つである。これは一般相対性理論のようなエレガントな数学の手品のようなものに基づいているわけではないのだが，その予言は，たとえば陽電子の予言のように重要である。特に興味深いのは，重ね合わせの原理を究極的な論理的結論としていることである。ボームと共同研究者たちは，量子力学の原理は仮のものに過ぎず，いつかは新しい現象を説明できなくなるだろうと考えた。しかし，量子力学の原理は機能しているのである。それが正しいとは証明されていないが，おあつらえ向きなことに，重ね合わせの原理はここでも持ちこたえているのである。

11
強い相互作用
Strong Coupling Schemes

ここまででハイペロンやメソンなどの粒子や，それらが強く結合していることの知識が与えられたので，次の問題は，どれがどれに，どんな風に強く結合するのかを調べることである†。これらの結合は核子数，電荷，アイソスピン，そしてストレンジネスを保存しなければならないが，結合を完全に決めるにはほど遠い。たとえば，π は核子との結合(8-1)，(8-2)以外はどのように結合するのであろうか？　$\Lambda \to \Sigma, \pi$ の結合はあるのか，また，その強さは，そして種類は？　…。(9-4) や $N \to \Sigma$，K，あるいは $\Sigma \to \Xi$，K のような反応で K の結合の法則はどうなのか？　各粒子のスピンさえ不確定である。$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ の崩壊を調べてみると，パイオンが角運動量を持ち去っていないことがはっきりしているので，ケイオンのスピンはおそらく 0 である。しかし，Λ と Σ のスピンは 1/2 のようだが，Λ，Σ，Ξ に関する実験データは不完全である。おそらくハイペロンはすべてスピン 1/2，メソンはスピン 0 である。

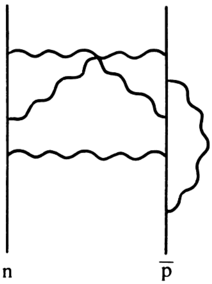
フェルミ-ヤン模型

強い相互作用を理解するために提案されている多くの模型の 1 つとして，フェルミ-ヤンのアイデアを議論してみよう。

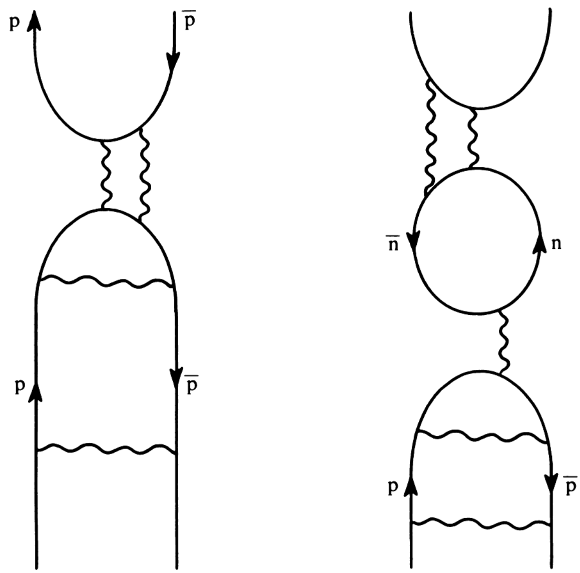
電荷に似ているが，別の荷電があり，中性子と陽子は同じ符号のその荷電を持っていて，非常に大きな質量のベクトル粒子に結合しているとしよう。すると，$n\bar{p}$ の系は長距離の引力である $e\bar{e}$ に似た短距離の引力を感ずること

†〔訳注〕強い相互作用は量子色力学によって記述できる。187 ページの補注“標準理論について”を参照。

になろう。n と $\overline{\mathrm{p}}$ はいっしょにして 2×938MeV を持っているが，たとえば，約 1600MeV 程度の結合エネルギーで非常に強く束縛されているとしよう。もし，力が正常であれば，全角運動量は 0，パリティは−1 となり，π^-を得る：$[\mathrm{n}\overline{\mathrm{p}}]=\pi^-$。同様に$[\mathrm{p}\overline{\mathrm{n}}]=\pi^+$。典型的なダイアグラムは図 11-1 に示した形であり，波線はベクトルメソンの交換を表す。また，$\mathrm{p}\overline{\mathrm{p}}$ と $\mathrm{n}\overline{\mathrm{n}}$ 系でも同様の過程が期待できる。これらのどれが π^0であるのか？



〈図 11-1〉



〈図 11-2〉

$p\bar{p}$ や $n\bar{n}$ には，$n\bar{p}$ や $p\bar{n}$ にはない図 11-2 のようなダイアグラムが付け加わる。π^+や π^-と同じエネルギーを持つが，消滅しない系は

$$(1/\sqrt{2})([\bar{p}p]-[\bar{n}n])=\pi^0$$

である†。これらがアイソスピン 3 重項を作る。残りの状態

$$(1/\sqrt{2})([\bar{p}p]+[\bar{n}n])=\Delta^0$$

は結合しないのか，あるいはもっと大きなエネルギーの全アイソスピン $T=0$ の新しい粒子であろう。

残りの粒子を作るには，少なくとも 1 個のストレンジネスを持つ“基本的”粒子を導入する必要がある。それを Λ に選ぼう。すると，次のようになる：

$$(\Lambda\bar{p})=K^-$$

$$(\bar{\Lambda}p)=K^+$$

$$(\Lambda\pi^{+,0,-})=\Sigma^{+,0,-}$$

$$(\Lambda\Lambda\bar{p})=\Xi^- \qquad (\Lambda\Lambda\bar{n})=\Xi^0$$

ストレンジネスはちょうど Λ の数になる。おわかりのように，強い相互作用をするあらゆる粒子は n，p，Λ の複合系であると考え，アイソスピンとストレンジネスの保存を導くことができる。

私のとっておきの仮説をお知らせしよう。それはある粒子が“基本的”であるかないか，あるいは，それが“基本的”粒子の複合系であるかないかはわからないということである。別の言葉で言えば，あらゆる複合粒子の理論は（もし計算できるとして）等価な結果を与えるので，互いを区別する方法はないであろう。

もし，粒子の複合系が全束縛エネルギーに比較して大きな質量を持っているならば（原子核や原子のように），複合系を論じても意味がある。しかし，束縛エネルギーが自由粒子の質量のかなりの部分を占めるなら，複合粒子と基本粒子の区別をつけることは正しくない。どうすれば，もっとはっきりとこのアイデアを記述できるのであろうか，また，どうすれば，これを実際に

---

† $\bar{p}p$ も $\bar{n}n$ も消滅する振幅はともに同じなので，状態 $(1/\sqrt{2})(\bar{p}p-\bar{n}n)$ は消滅できない。これがアイソスピン 3 重項の 1 つかどうかの判定では，$(-\bar{n}, \bar{p})$ をアイソスピン 2 重項とすることに注意せよ。

利用できるであろうか？　私はわからないのである。

強い結合の詳細な枠組みに関する理論的な提案が，推測の域を出ていないのはほぼ確実である。それらのうちの 2 つを紹介しよう。1 つはゲルマンの提案で，グローバル対称性と呼ばれる[7]。もし，K 結合がなかったなら，すべてのハイペロンは同一の質量を持ち，8 重項の各状態にあるというものである。2 つの新しい状態が Λ と Σ^0 の 1 次結合で作られる。すなわち，$Y=(1/\sqrt{2})(\Lambda-\Sigma^0)$ と $Z=(1/\sqrt{2})(\Lambda+\Sigma^0)$ である。ここで，n，p とパイオンとの結合 (8-1)，(8-2) で，n，p の代わりに Y，Σ^+，あるいは Σ^-，Z，または Ξ^-，Ξ^0 で置き換えるならば，パイオン結合の形と大きさは変わらないと仮定する。この対称性を破るケイオンの結合は決められない。

もう 1 つの提案は，パイオンが全アイソスピン・ベクトルに直接結合し，この結合が Λ，Σ の分離の基になるというものである。ケイオンは 2 重項 n，p と 4 重項 Λ，Σ との間，および，2 重項 Ξ^-，Ξ^0 と 4 重項 Λ，Σ との間を結合する（しかし，n，p との結合と Ξ^-，Ξ^0 との結合は異なる係数である）。（ゲルマン[7]の記号では，$g_{\Lambda\pi}=0$，$g_{N\pi}=1/2$；$g_{\Sigma\pi}=g_{\Xi\pi}$，$g_{\Sigma K}=g_{\Lambda K}$；$h_{\Sigma K}=h_{\Lambda K}$）この枠組みから予想される質量の値は実験とよく合う。不幸なことであるが，この仮説の決定的なテストはまだ発見されていない。

核衝突や光子によるケイオン生成の決定，このメソンと核の散乱や相互作用などに関する大規模な実験が計画されている。しかし，私たち理論家にとっては大変なことなのである。これらのデータすべてについて何ができるのか？　何もできやしない。きわめて深刻な問題に直面しており，アインシュタイン理論のような革新的なアイデアが必要とされている。おそらく，実験のすべてがばかげていると思えるほどの驚くべきことを発見するであろうし，誰かがある簡単な規則からすべてのことを計算できるようになろう。私たちがいまやっていることは，きわめて単純な規則性を満たしていると判明した水素原子のスペクトルを説明するために，かついろいろと工夫された複雑な模型にたとえられよう。

強い結合についてもう 1 つ。Λ が核子と強く結合している直接の証拠もある。ハイパーフラグメント（もっとよい名前はハイパー核であろう）が存在するが，そこでは Λ が多数の核子と結合している。たとえば，ハイパー核

${}_{\Lambda}He^4$が，核によるK^-捕獲から出てきたフラグメントとして発見されている。このハイパー核は2個の陽子，1個の中性子，1個のΛがいっしょに束縛されたものからなる。Λは数MeVで束縛されている。もちろんこの系は不安定である。というのは，Λの弱い崩壊（9-1）のため，パイオンと37MeVを放出してΛが消えてしまう機構(あるいは，パイオンは仮想的で再捕獲され，その静止エネルギーは核が崩壊する際に飛跡が描くスター中の核子の運動エネルギーとなる)が出てくる。これらのハイパー核を研究することによって，最後にはΛ-核子相互作用力に関する知識が得られよう。とにかく，核子-核子相互作用とほぼ等しいぐらいの強さである。詳しくはダリッツ（R. H. Dalitz）の解説[8]を参照のこと。

この他の強い結合に関する証拠は，結局のところ強い結合と弱い結合の関係を研究して初めてわかるのであろう。たとえば，各種の弱い崩壊過程の相対的割合と同様に，磁気能率や電磁的質量差が，強く相互作用する粒子の構造について何らかのことを教えるに違いない。しかし，強い結合では定量的に計算できないために，強い相互作用に関するこれらの証拠を理論的に研究しようとしても，まったくもって無力なのである。

12

ストレンジ粒子の崩壊

Decay of Strange Particles

次に，これらの粒子の弱い崩壊の証拠に移ろう。これらすべての粒子の質量や崩壊の性質に関する実験的な情報は表 12-1 に与えられている。ここではハイペロンとメソンの崩壊だけを扱う。2 つの崩壊 $\pi^0 \to \gamma + \gamma$，$\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$ は，明らかに（強い結合による仮想的状態は付随するが）電磁結合の結果である。これらは電荷保存則と，電磁結合ではストレンジネスが変わらないという原理から許される唯一のものである。

残りの崩壊はすべてほぼ同じオーダーの寿命を持っている。それらはすべてフェルミ型の結合の結果である（強い相互作用から出てくる仮想的状態は

〈表 12-1〉

生成物		割合〔%〕	寿命〔sec〕
$n \to$	$p + e + \bar{\nu}$		1040
$\Lambda \to$	$p + \pi^-$	63 ± 3	2.6×10^{-10}
	$n + \pi^0$	37 ± 3	
$\Sigma^+ \to$	$p + \pi^0$	46 ± 6	0.8×10^{-10}
	$n + \pi^+$	54 ± 6	
$\Sigma^- \to$	$n + \pi^-$	100	1.6×10^{-10}
$\Xi^- \to$	$\Lambda + \pi^-$	?	$\simeq 10^{-9}$
$\pi^+ \to$	$\mu^+ + \nu$	100	2.56×10^{-8}
	$e^+ + \nu$	0.013	
$K^+ \to$	$\mu^+ + \nu$	59 ± 2	1.22×10^{-8}
	$\pi^+ + \pi^0$	26 ± 2	
	$\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$	5.7 ± 0.3	
	$\pi^+ + \pi^0 + \pi^0$	1.7 ± 0.3	
	$\pi^0 + e^+ + \nu$	4.2 ± 0.4	
	$\pi^0 + \mu^+ + \nu$	4.0 ± 0.8	
$K_1^0 \to$	$\pi^+ + \pi^-$	78 ± 6	1.0×10^{-10}
	$\pi^0 + \pi^0$	22 ± 6	

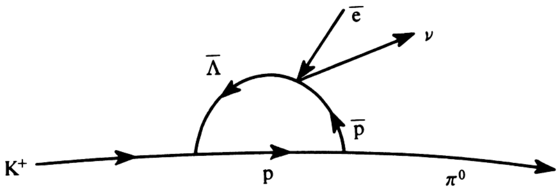
いつでも付随しているとする）と信じられている。すでに，この仮説は寿命のだいたいの大きさを含め，いくつかの性質を説明している。これもレプトン放出については，おそらく不思議なことではなかろう。しかし，レプトンが含まれていないときですら，パリティ保存が破れる（左を右に鏡映したときの非対称性）ため，フェルミ結合が必要となる。同一の粒子 K が（全角運動量 0 の）2 個と 3 個のパイオンに崩壊できる事実から，現実に，物理法則でパリティの保存が破れている可能性のあることが初めて示唆された。つい最近，Λ の $p+\pi^-$への崩壊で，生成物の進行方向が非対称に分布することが発見されたが，これは鏡映対称性が破れていることを示している。すでに 3 種のフェルミ結合 (6-4)，(6-5)，(6-6) を書いたが，どの場合でも，レプトンのストレンジネスを 0 と数えれば，ストレンジネスは変化していない。したがって，この 3 種では，S を全ストレンジネスとして，$\Delta S=0$ の崩壊を説明すると期待できるだけである。中性子崩壊 $n\to p+e+\bar{\nu}$ とパイオン崩壊 $\pi^+\to\mu^++\nu$ だけであり，後者は仮想状態を経由しての (6-6) の間接的な結果であるとしてすでに議論した。

残りの崩壊は，$\Delta S=\pm1$ と，ストレンジネスを 1 だけ変化する。これを起こす基本的結合は，おそらくフェルミ結合ではあるが，まだ確定されていない。これを決めることは興味深い問題であり，もう少し詳細に踏み込んでみよう。

フェルミ結合の仕組み

最初に必要とされる最少の新しい結合を数えてみよう。まず第 1 に $K^+\to e^++\nu+\pi^0$のような崩壊が存在することから，'$\bar{\nu}$'e はストレンジネスの変化する組み合わせに結合することがわかる。直接 $\overline{K^+}\pi^0$に結合する必要はない。というのは，強い結合のため，たとえば $\bar{p}\Lambda$ のような何か他の組が $\bar{\nu}e$ に結合すれば，この崩壊が可能になるからである。例として（図 12-1），K^+は仮想的に$\bar{\Lambda}$と p になることができ，$\bar{\Lambda}$は$\bar{p}\,\bar{e}\,\nu$ に崩壊し，p と $\bar{p}$が消滅して π^0になれる。たとえば，(6-4) の類推で

$$\bar{p}\,\Lambda\longleftrightarrow\bar{\nu}e \tag{12-1}$$



〈図 12-1〉

のようなフェルミ結合を考えてみよう。しかし，ミューオンも$\Delta S=-1$の崩壊（たとえば$K^+\to\mu^++\nu$，あるいは$K^+\to\mu^++\nu+\pi^0$）で放出されるので，

$$\bar{p}\,\Lambda\longleftrightarrow\bar{\nu}\mu \qquad (12\text{-}2)$$

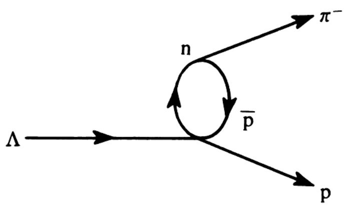
の結合も追加しなければならない。最後に，ニュートリノがまったく含まれていない崩壊がある。これらは

$$\bar{p}\,\Lambda\longleftrightarrow\bar{p}\,n \qquad (12\text{-}3)$$

と，強い結合を通してのこれに等価な型のフェルミ結合から生じる。たとえば，$\Lambda\to p+\pi^-$崩壊は

$$\Lambda\xrightarrow[(12\text{-}3)]{} p+\bar{p}+n$$

$$\xrightarrow[(7\text{-}4)]{} p+\pi^-$$



のような仮想過程，それにもっと複雑なダイアグラムを経由する。これら3種の結合で知られているあらゆる崩壊は定性的に説明できよう。

6種の独立なフェルミ結合を提案することは複雑に見えるかも知れないが，1つの仮定をすれば，新しく3種のものが現れたのは当然に思える。すなわち，フェルミ結合はある種のカレントとそれ自身との相互作用

$$J\longleftrightarrow J \qquad (12\text{-}4)$$

から自然と出てくるものであり，カレントはいくつかの部分からなるが，問題はそのカレントの成分を見つけることである。前に述べた結合（6-4），（6-5），（6-6）はJが

$$J=(\bar{\nu}e)+(\bar{\nu}\mu)+(\bar{p}n)+X \qquad (12\text{-}5)$$

と書けるとすると，出てくる。実験的には最初の3項の係数は等しい。新しい型の結合は，J にストレンジネスを変えるたった1つの項を加えればすべて出てくるが，それを X としよう。上で，例として X がどうあるべきかだけを論じたが，今度は項 X がどういう性質を持つべきかをもっと真剣に考えなければならない。

このアイデアから3種のカレント（$\bar{\nu}$e），（$\bar{\nu}\mu$），（$\bar{\mathrm{p}}$ n）のそれぞれに X が結合する係数は等しいということが直接出てくる。すなわち，結合（12-1），(12-2)，(12-3) はすべて同一の係数である［しかし，(6-4)，(6-5)，(6-6) の係数とは等しくない］。

もし，（$\bar{\nu}$e）と（$\bar{\nu}\mu$）が X に結合する係数が等しいなら，K^+が $e^+ + \nu + \pi^0$ に崩壊するのは $\mu^+ + \nu + \pi^0$に崩壊するのとほとんど同じ程度であると計算できる。これはデータによって30%の精度で支持されている。いままで $K^+ \to e^+ + \nu$ が見つからないのは，もし K^+がスピン0を持っているとするなら，$K^+ \to e^+ + \nu$ の割合は $K^+ \to \mu^+ + \nu$ に比べてきわめて少ないので，矛盾はしない。

X に対する（$\bar{\mathrm{p}}$ n）と（$\bar{\nu}\mu$）の結合が等しいという予言はチェックできるであろうか？　残念ながら，強い結合がまだ解析できないため，それを実行する方法が見つからない。

ストレンジネス変化崩壊に対して提案された対称性の規則

カレント X について何が言えるであろうか？　できるだけ制限を加えた仮説を作ることにしよう。そうすれば，将来，いくつかの予言はまちがいであることがわかるかも知れないが，最大限の予言ができる。最初に，$K^+ \to e^+ + \nu + \pi^0$が存在することから，もしストレンジネスが減少すれば，陽電子が放出される必要がある。だから，X は全ストレンジネスが-1（そしてまた，いつの場合も負の電荷）である粒子の組からなる（$\bar{\mathrm{p}}\Lambda$）のような項を少なくとも1つは持たねばならない。X の中に，($\overline{\Sigma^+}$n) のようなストレンジネス$+1$の項もありうるだろうか？　そうでなければならない証拠はないので，次のように仮定しよう：

1. Xはストレンジネス-1の項だけを含む。

この結果として，$\Delta S=2$ の崩壊は禁止される。したがって，Ξ^-は $n + \pi^-$に

崩壊できないが，この崩壊はいままでに観測されていない。

さらに，K_2^0は$\bar{e}+\nu+\pi^-$と$e+\bar{\nu}+\pi^+$に等しく崩壊できるが，前者だけがK^0に，後者だけが$\overline{K^0}$に許される。したがって，K^0ビームの進路近くで(K_1^0成分がまだ崩壊してしまわないところで）それの希な崩壊が測定されるのなら，荷電レプトン（e あるいはμ）は主として正となろう。これを証明する実験はまだ行なわれていない。

次に，カレント X は，もし（$\bar{p}\Lambda$）ならば，アイソスピンは 1/2 となろう。他の組み合わせ，たとえば（$\bar{p}\Sigma^0$）のようなものだけなら，部分的にアイソスピン 3/2 を持っている。もし純粋にアイソスピン 3/2 だけなら，レプトン崩壊で$\Delta T=3/2$ の規則が成立しよう。しかし，そうするとアイソスピン 1/2 のK^+の崩壊$K^+\to\mu^++\nu$が不可能になってしまう（なぜなら，この場合$\Delta T=1/2$ である）。したがって，X は少なくとも何がしかのアイソスピン 1/2 の成分を含まねばならない。X は純粋にアイソスピン 1/2 であると仮定しよう［したがって，（$\bar{p}\Sigma^0$）が現れるのなら，$-(\bar{p}\Sigma^0)+\sqrt{2}(\bar{n}\Sigma^-)$ の組み合わせに限られる］。そこで，次の規則が得られよう：

2. レプトン崩壊ではアイソスピンの変化は 1/2 だけに限られる。

この規則は 2 つの崩壊

$$K^+\to\pi^0+e^++\nu \tag{12-6}$$

および

$$K^0\to\pi^-+e^++\nu \tag{12-7}$$

を比べることによってテストできる。この規則によれば，2 つの K を右辺に持ってきて反粒子$\overline{K}$にすると，2 つの組み合わせ($\overline{K^+}\pi^0$)，($\overline{K^0}\pi^-$)はアイソスピン 1/2 の状態を作るために［(8-2) の表現に類似した］$-(\overline{K^+}\pi^0)+\sqrt{2}(\overline{K^0}\pi^-)$ に比例した振幅を持たねばならない。したがって，2 番目の反応 (12-7) に対する振幅は 1 番目 (12-6) の$-\sqrt{2}$倍であり，そのためK^0の崩壊の割合はK^+の 2 倍となる。$\overline{K^0}$の崩壊は (12-7) に対応する反粒子の反応

$$\overline{K^0}\to\pi^++e^-+\bar{\nu} \tag{12-8}$$

のはずで，(12-7) と同じ割合［すなわち (12-6) の割合の 2 倍］で起こらなければならない。K_2^0は振幅の$1/\sqrt{2}$がK^0であり，$-1/\sqrt{2}$が$\overline{K^0}$なので，(12-

6）の割合で $\pi^- + e^+ + \nu$ に，そして同じ割合で $\pi^+ + e^- + \bar{\nu}$ に崩壊するであろう。同じような関係が，電子をミューオンに置き換えた崩壊にも適用できる。これらの予言は（いままでに）実験的に確認されている。

13

普遍結合係数の問題

The Question of a Universal Coupling Coefficient

非レプトン崩壊はカレント J の中の項 $(\bar{\mathrm{p}}\mathrm{n})$ と X の組み合わせから生じる。この項 $(\bar{\mathrm{p}}\mathrm{n})$ はアイソスピン 1 なので，純粋にアイソスピン 1/2 と仮定した X と組み合わされると，アイソスピンは 1/2 と 3/2 だけしか作れないので，ストレンジネス変化崩壊を支配する第 3 の規則を推測できる：

3. 非レプトン崩壊ではアイソスピンの変化は

$$\Delta T=1/2 \qquad \text{または} \qquad \Delta T=3/2$$

だけが可能である。

これはそれほど強い制限とは思えないが，チェックできる結果を導く。

まず，ケイオンの 3 個のパイオン崩壊に関し，電荷の違いの割合が予言できる。崩壊

$$\mathrm{K}^+\rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \tag{13-1}$$

の 3 個のパイオンは，その運動量分布から角運動量 0 の状態にあるようなので，パイオンの波動関数は完全に対称的である。アイソスピン 1 の 3 個の粒子がとりうる対称なアイソスピン波動関数は，$T=1$ と $T=3$ に限られる。もし規則 3 が正しいなら，$T=3$ の状態には，少なくとも 5/2 の変化が含まれねばならないので，始状態の $T=1/2$ のケイオンからは作れないことになる。したがって，終状態は $T=1$ でなければならず，3 個のパイオンの状態を組み合わせる規則から，$\mathrm{K}^+\rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$崩壊の割合は (13-1) の割合の 1/2 となるはずである（ただし，π^+と π^0の小さな質量差から，1 個の π^0について約 9％割合が増加する)。実験的に得られた割合は 0.30 ± 0.06 であり，予言値0.25 $(1.2)=0.30$ と一致する。

まったく同様な議論で，K_2^0 の 3 個のパイオン崩壊

$$K_2^0 \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \tag{13-2}$$

$$K_2^0 \to \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \tag{13-3}$$

は，もし終状態が $T=1$ ならば，2/3 の割合で起こるはずである［あるいは，π^0の質量差を修正した割合では $2(1.1)/3(1.3)=0.56$］。K_2^0についての測定がまさに始められたところであり，いまのところ予言と一致している。

また，ケイオンの 2 個のパイオン崩壊に関する結果もある。データは

$K_1^0 \to \pi^+ + \pi^-$		78±6%
$\to \pi^0 + \pi^0$		22±6%
$K^+ \to \pi^+ + \pi^-$		K_1^0 崩壊の割合の 0.002 倍

である。著しい特徴は，K^+崩壊が K_1^0 崩壊よりはるかに遅いということである。

2 個のパイオンが対称的な状態にあれば，全アイソスピンは $T=0$ あるいは $T=2$ となる。K^+で π^+と π^0の場合は $T=2$ だけが可能となる。これらの場合，一般的に $T=1/2$ のケイオンからこれが可能となるには，$\Delta T=3/2$，あるいは$\Delta T=5/2$ だけである（アイソスピンはベクトルとして加えられる）。しかしながら，仮説 3 のため$\Delta T=3/2$ だけが効く。このことは，K^+崩壊の割合を使えば，K_1^0 崩壊の $T=2$ 成分の相対的振幅が与えられることを意味する。実際はその 2 乗が与えられるだけだが，K_1^0の 2 個のパイオンが $T=2$ の状態にある振幅は，0.052 という値にある位相をかけたものであることがわかる。この振幅は非常に小さいので，K_1^0はほとんど純粋な $T=0$ に崩壊するはずである。もしそうであるなら，$\pi^+ + \pi^-$と $\pi^0 + \pi^0$の相対的な割合は 2：1，つまり，67%が荷電粒子であるはずである。$T=2$ の振幅が最大限，あるいは最小限に干渉する位相を持つとすれば，割合の予言値は，順に 72，62%となる。したがって理論的には，もし仮説 3 が正しいとすると，K_1^0 崩壊に $\pi^+ + \pi^-$の占める割合は 62 から 72%の間のどこかにある。これが正しいかどうかを見るにはもっと正確なデータを待たねばならないが，現在の結果はまさに矛盾がない。したがって，私たちの知るかぎり，カレント X はストレンジネス－1 でアイソスピン 1/2 のものに限られる。そこで，X の形を既知の粒子で表せば，α，β，γ，δ，ε を決めるべき係数として，

$$X=\alpha(\overline{\mathrm{p}}\Lambda)+\beta[-(\overline{\mathrm{p}}\Sigma^0)+\sqrt{2}(\overline{\mathrm{n}}\Sigma^-)]$$
$$+\gamma[-(\overline{\mathrm{K}^+}\pi^0)+\sqrt{2}(\overline{\mathrm{K}^0}\pi^-)]+\delta[-(\overline{\Sigma^0}\Xi^-)+\sqrt{2}(\overline{\Sigma^+}\Xi^0)]$$
$$+\varepsilon(\bar{\Lambda}\Xi^-)$$

となろう。ここまでが話を進められる限度である。次に，さらに進める際に困難となる点を指摘しよう。

普遍結合係数の問題

J の中の異なる項でも（$\bar{\nu}$e)，($\bar{\nu}\mu$)，($\overline{\mathrm{p}}$n) の係数は明らかに等しいことから，ある種の普遍性が予想され，すべての粒子の組み合わせの結合係数が等しい(普遍的)，つまり α から ε までのすべての係数が等しいという提案がなされるのは当然のことである。[あるいは，$\sqrt{2}$ という因子を項ごとに別々に配置すれば，ある係数は 1，残りは $1/\sqrt{2}$ となり，特別な対称性が出てくる。たとえば，$\alpha=1/\sqrt{2}=-\beta$ ならば，最初の 2 項は ($\overline{\mathrm{p}}$Z) − ($\overline{\mathrm{n}}\Sigma^-$) となり，グローバル対称性からすると特に簡単な組み合わせとなる。]

上で示唆された第 2 番目の強結合理論のより進んだ例として，特に簡単な仮説は次のようなものであろう：(1) ストレンジネスの変化しないフェルミカレントは π^+，つまり，アイソスピンの 1 成分と同じ粒子の組み合わせに結合する。そして，また(2)ストレンジネスの変化するフェルミカレントは K^+ と同じ粒子の組み合わせに結合する。この仮説は $\alpha=-\beta$，$\delta=\varepsilon$，そして，おそらくは $\gamma=0$ であることを意味する。

しかし，これが事実と異なるという直接的な証拠がある。もし $\gamma=1$ なら，他の項を無視して，$\mathrm{K}^+\rightarrow\pi^0+\mathrm{e}^++\nu$ の崩壊は直接過程となり，その割合が計算できよう。しかしそれは 170 倍も速いことがわかる。他のダイアグラムからくるいくぶんかの修正があろうが，それほど劇的に小さくできないのは確実である。したがって，γ は 0 であるか，あるいは γ は 0.08（つまり，割合は γ^2 となるので，$1/\sqrt{170}$)の程度であるといえる。もし γ が 0 であれば，この過程は間接的であるはずで，計算はできない(最初に推測した仮説の中で，γ が 0，他の係数が 1 程度であっても，この過程がなぜそれほど遅いのかを説明するのはむずかしく，他の係数についての確実な結論は，この方法ではまだ導けない)。そしてさらに，$\alpha=1$ ならば，$\Lambda\rightarrow\mathrm{p}+\mathrm{e}+\bar{\nu}$ の過程に対する割

合を計算できる。この過程の e を μ で置き換えた過程はまだ見つかっていないが，予言では Λ 崩壊が 16%で現れるはずである。実験的には予言値の 1/10 以下でしか起こらないといえる。他のダイアグラムとの干渉効果によってこのようになるということはありそうもないので，α はおそらく 0.3 以下である。これに加えて，Σ^-の非レプトン崩壊は，$\beta=1/\sqrt{2}$ として期待される値の 10%以下しか見つかっていないので，$\beta\cdot\sqrt{2}$ は 0.3 以下のはずである。それゆえ，X が普遍結合から期待されるように，係数が 1 程度で等しくレプトンに結合するようには見えない。実際，0.1 程度の係数であるのがもっともらしい。($K^+\to\mu^++\nu$ が速いことからこれを否定しようとしても，ここでも，定量的に計算する際の不確定さのために，それは不可能である。)

これらの点を要約すると，実験の分析から理論的には期待できないのだが，データは次のようなことを示唆している：

4. ストレンジネスの変化するレプトン崩壊はストレンジンネスの変化しないものに比べ，はるかに遅い($K^+\to\mu^++\nu$ が破れている可能性はあるが)。

しかし，X の中の係数がレプトン結合に対して 0.1 の程度なら，($\bar{\text{p}}$n)結合に対しても正確に同一であると期待すべきであろう。これに比較して非レプトン崩壊は速すぎるようなので，これは好ましくない。非レプトン崩壊は 1 程度の係数を必要とするようであるが，確信できない。というのは，含まれている強い相互作用をする粒子の仮想状態のために，これらの過程は実際に計算できないからである。

以上に追加して，データによって示唆されるが，理論的には説明されないもう 1 つの近似的な対称性がある：

5. 非レプトンでストレンジネスの変わる崩壊について，$\Delta T=3/2$ のものは $\Delta T=1/2$ のものに比較してはるかに遅い。つまり，弱い。

14

ストレンジネスの変わる崩壊の規則：実験

Rules for Strangeness Changing Decays : Experiments

すでに $K \to \pi+\pi$ 崩壊のところで，中性ケイオン（$\Delta T=1/2$）が荷電ケイオン（$\Delta T=3/2$）より 500 倍速く崩壊することを注意しておいた。そこでは，$\Delta T=3/2$ の振幅は$\Delta T=1/2$ の振幅の 0.052 にしか過ぎなかった。

この他に，そのような支配的な振幅があるかどうかを調べてみよう。最も良い方法は，他のデータが，非レプトン崩壊は完全に$\Delta T=1/2$ であるという規則を満たしているかどうかを調べてみることである。

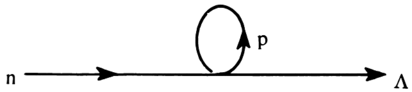
最初に，$T=0$ の Λ からの崩壊では，終状態が $T=1/2$ だから，$n+\pi^0$の場合に対する $p+\pi^-$の場合の割合は 2：1，つまり，この崩壊の 67%が荷電成分となる。データは 63±3%であり，くい違いは実験誤差か，$T=3/2$ とのきわめて小さな干渉の効果によるものであろう。

2 番目には，Σ 崩壊に関しての非対称性について少し予言できる。現在の不十分なデータでは不等式を表すだけであるが，実際，それはデータを満足している。

3 番目は，ここで，K_2^0が 3 個のパイオンに崩壊する（13-2）と（13-3）の，K^+の対応する (13-1) に対する割合を決められる。というのは，もし$\Delta T=1/2$ ならば $T=1$ となるのが一意的だからである。予言は K_2^0が 3 個のパイオンへ崩壊する全部の割合は，K^+が 3 個のパイオンへ崩壊する全部の割合に等しいというものである（π^0 1 個について 9%の修正は許されるものとする）。K_2^0についての初歩的な測定は，これと一致していないわけではない。

$\Xi^0 \to \Lambda+\pi^0$の割合は，$\Xi^- \to \Lambda+\pi^-$の割合の半分の速さと予言できるが，Ξ^0についてのデータが利用できない。

この法則の起源はわからない。というのは，ある X が $(\bar{p}n)$ に結合して崩



〈図 14-1〉

壊が生じたとすると，$\Delta T=1/2$ と$\Delta T=3/2$ の振幅がなぜ，全体として同じ大きさをとらないのか，はっきりした理由がないからである。また，X の係数が小さいことの起源も依然として謎として残っている。

著者たちによって出された推測に(未発表)，“1 つの特別なダイアグラムが他よりはるかに重要であり，普通評価されているより約 10 倍も大きい”というものがある。このアイデアを簡単に X が 0.1 ($\bar{\mathrm{p}}\Lambda$) とする例で説明しよう。このとき，$\bar{\mathrm{p}}\mathrm{n}\leftrightarrow\bar{\mathrm{p}}\Lambda$ の結合で p が消せるので，n → Λ 変換の直接的な振幅が与えられる。そのような消滅機構は陽子の閉じたループを持つ図 14-1 のダイアグラムである。ループが乱されていないこのダイアグラムは，想像するよりも，そして他のダイアグラムよりもはるかに大きいものと思っている。この大きさが X の係数 0.1 の小ささを補償し，非レプトン崩壊が通常の割合をとるようにしている。さらに，そこでは支配的な結合が実効的には n↔Λ，つまりΔT が$\pm 1/2$ に限定された変換となり，この限定が規則 5 のようになる。$\Delta T=3/2$ の成分は，もっと複雑な普通のダイアグラムだけから出てきて，小さな係数 0.1 は補償されない。

しかし，2 つの謎 (4 と 5) を 2 つのアドホックな仮定 (X の係数が小さく，ある特別なダイアグラムが大きい) で説明するので，成功しているかどうかは明らかでない。Λ と Σ 崩壊についてのあらゆる細かなことも，グローバル対称性の仮説を使い，n↔Y と $\mathrm{p}\leftrightarrow\Sigma^+$ の結合を等しいと考え，摂動計算を使えばきちんと解決できるが，摂動計算は正当化できないのである。

要約

ここで，我々の直面した特徴を要約するのがよいであろう。

場の量子論の原則によれば，自然界には質量とスピン（整数あるいは半整数）を持つ粒子だけが存在し，お互いの間に結合と呼ばれる関係がある。こ

れらの粒子は，弱い相互作用をする粒子と強い相互作用をする粒子の 2 つの組に分けられる。弱い相互作用をする粒子[†]は光子，重力子(これは無視できる)，そしてレプトン（e，μ，ν）を含む。強い相互作用をする粒子はメソンとバリオンである（表 9-1 と 9-2 を参照)。

読者は粒子と結合についてわかったので，あらゆることがわかることになる。ナッツの殻の中の物理なのである！　重力（これはどう見るかによってあらゆるものを保存するかも知れないし，何も保存しないかも知れない）以外の結合は表 14-1 にあげられた性質を持っている。

〈表 14-1〉

結　合	相対的な強さ	満たされる保存則		
		アイソスピン	ストレンジネス	パリティ
フェルミ結合	10^{-10}	No	No	No
電磁気結合	10^{-2}	No	Yes	Yes
強結合	10^{1}	Yes	Yes	Yes

すべての結合が満足する保存則には 2 種類ある。

幾何学的な法則

角運動量（回転）

エネルギー，運動量（変位）

パリティ×荷電変換

時間反転

数の法則

レプトン数

電荷

バリオン数（核子荷電保存則）

31 個の粒子のあることを知っている。したがって，標準的な場の理論では，これらの粒子を記述するのに 31 の場を必要とするのである！　しかしながら，ある粒子は複合系かも知れないので，うまくやれば必要とする場の数を少なくできよう。必要最少限の数はいくつなのか？　まず，バリオン 1 個が

†〔訳注〕ここで“弱い相互作用”と言っているのは，強い相互作用以外のものという意味である。

必要である。また，アイソスピン1/2を持つもの(2つの状態)が必要であり，そしてストレンジネスの性質が必要である。したがって，たとえば3個のバリオン，n，p，Λで切り抜けられよう。しかし，これはレプトンについては何も言えない。そこで，ν，e，γとおそらくは重力子が必要である。μについてどうなるかは誰も知らない。それもまた加えるなら，少なくとも8個の場と4個の結合を説明しなければならない。

これが，いまのところ話を進められる限界である。明らかに，対称性が見つかれば著しく進歩するが，そうでなく，計算による研究ではあまり多くの情報が得られたわけではない。これらの問題を定量的に解析する方法で信頼できるものが切に必要とされている。

しかし，本当に深遠で，非常に興味のあるのは，この講義を通じて暗黙のうちには伝えていたが，はっきりとは言わなかった次の問題である。これらすべての互いに相関する対称性，部分的対称性，そして非対称性の背後にある意味，あるいはパターンは何なのか？†

---

†〔訳注〕ここでファインマンが指摘していた問題点は，原理的には$SU(2)_L \times U(1) \times SU(3)$ゲージ理論のいわゆる標準模型によって説明されている。185ページの補注“標準理論について”参照。

15

電磁相互作用とβ崩壊結合の基本法則

Fundamental Laws of Electromagnetics and β-Decay Coupling

ここで，計算可能な過程ではどのように定量的な計算をするかを見てみよう。ただ結果を示すだけにし，その計算が正しいという発見法的議論をしよう。場の理論は，実際のところ内部矛盾がないわけではないので，それから始める必要はないと思う。とにかく，私は新しいアイデアの入る余地を残しておきたいのである。

読者は，このような方法で示された物理を学ぶには，教育学的にかなり困難であるかも知れない。もっと歴史的に勉強したほうがやさしいのであろう。つまり，シュレーディンガー方程式からディラック方程式に行き，調和振動子の量子化から生成，消滅演算子へと，そして最後にはいろいろな過程の振幅を出すというように。そうでなく，最終的な振幅を見つける方法そのものを示そう。というのは，その規則が段階を踏んで振幅を出すよりもはるかに簡単だからである。さらに，(たとえばシュレーディンガー方程式などの)別の方法から始めても，その状況は最終的結果に対する近似であり，特定の条件下でのみ有効なのである。本当に物理を理解するために最終的に求められることは，なぜ，シュレーディンガー方程式がより基本的な法則の結果であるかということである。歴史的に，教育学的に理解するには，シュレーディンガー方程式から始めて，それから他の方法へ移ればよい。しかし，実際はこのように演繹されていくわけではなく，ディラック行列など，新しいことを次々に付け加えなければならない。しかしこの方法は，物理の最前線へ登る長く，苦しい道である。学習法に 1 つの実験を努力して試みてみよう。読者を最前線そのものに降ろせるかどうかを見てみよう。そうすれば，読者は 2 つのことができるようになる。最初に，未知のものを調べ，問題となしとげ

られた進歩がわかり，そして，おそらくはそれらのいくつかを解決するのに役立てる。第2番目は，ニュートンの法則からマクスウェル方程式，シュレーディンガー方程式へとすでに学んできたいろいろなことが，すべて現在学んでいるものの結果なのだという事態を振り返り，理解しようとすることができる。後者ははっきりしたものではなく，いま論じているような明らかにアドホックな規則はなかなか容認できないだろう。しかし，自然はそうなのであり，ゆっくり運動している多数の粒子間には非常に多くの相互作用があるが，シュレーディンガー方程式はそれを近似的に記述する方程式であると，自然はそう“理解”しているのである。基本的要素は，任意の速度で運動している少数の粒子間に働く基本的相互作用である。これに注意を集中しよう。

現在，量子力学で，合理的で満足のいく定性的な記述のできている相互作用は，電磁相互作用とフェルミ，あるいはβ崩壊結合だけである。

相互作用し，他の粒子を生成し，崩壊などをしている少数の粒子を含む過程を考えよう。そのようなひとつひとつの過程に振幅があり，振幅の2乗がその過程の生じる確率を与える。仮想粒子がない場合から始める。これは仮想粒子を含む過程より簡単であり，仮想粒子を含む過程はのちほど扱おう。また，スピンと相対論を同時に持ち込んで物事を混乱させないために，スピン0（スカラー）の粒子から始める。

スカラー粒子の波動関数は1成分である。変換$x_\mu \to x'_\mu$(回転あるいはローレンツ変換）のもとで，波動関数は

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t) \longrightarrow \varphi(x',\ y',\ z',\ t')$$

となる。空間反転

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow -\boldsymbol{x}$$

$$t \longrightarrow t$$

ではどうなるか？　もし$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(-\boldsymbol{x}, t)$なら“スカラー”粒子について話しているのであり，$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = -\varphi(-\boldsymbol{x}, t)$なら“擬スカラー”粒子である。もちろん，$\varphi$はこれらのいずれも満たさないかも知れない。

自由粒子は，$p \cdot x = p_\mu x_\mu = Et - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}$として，平面波

$$u \exp(-ip \cdot x)$$

で表せると仮定しよう。これがド・ブロイの仮定であり，uは座標変換のもと

で変わらない。

次に確率に対する表現を求めよう。これは4元ベクトル（S_μ）の第4成分でなければならない。というのは，どこかに粒子を見いだす確率

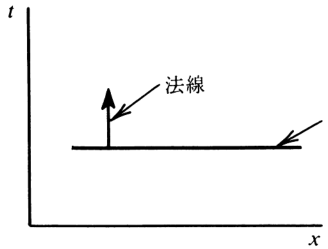
$$\int S_4 dxdydz$$

は，不変でなければならないからである。ここで，S_4は1cm^{3}当たり粒子を見いだす確率であり（過去から未来へ通り過ぎる確率でもある），$\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{S}$ に垂直な面を1cm^2・sec当たり通り過ぎる確率である。

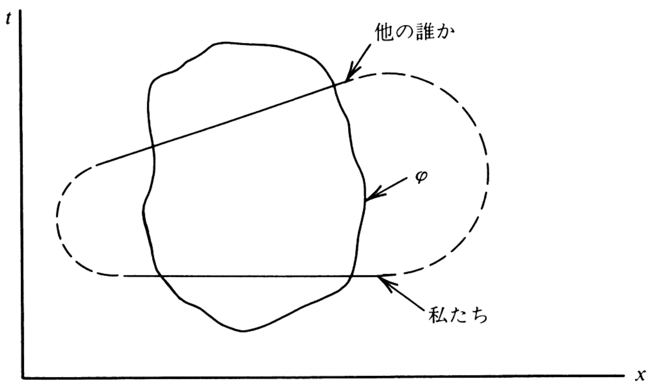
$\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\varphi}$ はスカラーであるから，S_4を満足しない。S_4の空間積分は，実際4次元の表面積分である（図15-1を参照）。明らかに，この一般化は

$$表面を通過する確率 = \int S_\mu N_\mu d^3(表面)$$

であり，N_μは，$N_\mu N_\mu = 1$ を満たす表面の単位法線ベクトルである。



〈図 15-1〉



〈図 15-2〉

粒子が空間のある有限領域に局在化しているとしよう（したがって u は平面波ではない）。他のローレンツ系にいる誰かが，彼の系で確率積分を実行したときに，私たちと同じ結果が得られるであろうか？　時空間図では“運動している”系が回転することを思い出せば，図 15-2 のような模式図が描ける。

粒子は局在化しているので，ある距離行けば S_μ はゼロとなるので，図の点線で示したように積分路を閉じることができる。

したがって，

$$\int S_\mu N_\mu d^3(\text{表面})=0$$

ならば，両観測者は同じ結果を得る。ガウスの定理を用いれば，これは

$$\partial S_\mu/\partial x_\mu=0$$

となれば保証されるが，これは確率の保存を表している。

平面波に対して，u^*u が確率密度としてふさわしくないことを知っている。唯一の利用できる 4 元ベクトルは p_μ であるから，

$$S_\mu=2p_\mu u^*u$$

となる（2 という因子はここで選んだ方式によるものである）。これより，

$$S_4=2Eu^*u$$

となる。

これは意味があるのであろうか？　運動系では密度がちょうど E のもつ因子だけ大きく見えることに注意してほしい。そこで，すべての系で $u^*u=1$ としておくと，相対論的規格化は 1cm³当たり $2E$ となる。これは気違いじみた規格化ではあるが，実用上は非常に有効である。いつでもこの方法で規格化しよう。

S_μ に対するもっと一般的な表現はどうであろうか？　平面波に対しては

$$S_\mu=2\varphi^*i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi$$

である。一般の場合には，もっと対称的な形の

$$S_\mu=\varphi^*i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi-i\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi$$

としなければならない。

ここですべてのことを定義したので，どのように計算するか見てみよう。

毎秒当たりの遷移確率の有名な公式

$$\text{Prob./sec}=2\pi|M_{\text{fi}}|^2\frac{(\text{終状態密度})}{(\text{単位エネルギー間隔})}$$

を思い出そう。ただし $E_{\text{f}}=E_{\text{i}}$で計算している。

この形は我々の目的にとって便利ではない。そこで，思ってもみないような形に書き変えよう。まず最初に，ここでの規格化を使うために，この過程の入射粒子 1 個につき $2E$ で割らねばならない。いつでも連続な状態で取り扱う予定だから，

$$\text{Prob./sec}=2\pi=\frac{|M_{\text{fi}}|^2}{\prod_{\text{in}}(2E)\prod_{\text{out}}(2E)}\frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3}\cdots\frac{d^3\boldsymbol{p}_{N-1}}{(2\pi)^3}\frac{1}{dE}$$

となる。状態密度の表現に $d^3\boldsymbol{p}_N/(2\pi)^3$がないが，運動量保存のためであることに注意せよ。すべての粒子について対称的な公式にするには

$$[d^3\boldsymbol{p}_N/(2\pi)^3](2\pi)^3\delta^{(3)}(\sum_{\text{in}}\boldsymbol{p}-\sum_{\text{out}}\boldsymbol{p})$$

という因子を加えればよい。また $1/dE$ を $\delta(\sum_{\text{in}}E-\sum_{\text{out}}E)$ で置き換える。実際，任意の状態間で

$$\text{Prob./sec.}=2\pi|M_{\text{fi}}|^2\delta(E_{\text{f}}-E_{\text{i}})(\text{終状態密度})$$

の形の公式から始めることもできる。さらに，

$$\delta(ax)=(1/a)\delta(x)$$

$$\delta(f(x))=[1/|f'(x_0)|]\delta(x-x_0)\qquad f(x_0)=0\text{ の場合}$$

であることを思い出そう。これを使えば，

$$\int\delta(p_4^2-\boldsymbol{p}^2-m^2)\,dp_4=1/2p_4\Big|_{p_4=(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2}}=1/2E$$

であるから，公式の中の $\boldsymbol{p}$ と E との間の非対称性を除ける。つまり，$p_{\text{i}}=(E_{\text{i}},\boldsymbol{p}_{\text{i}})$ として，

$$d^3\boldsymbol{p}_{\text{i}}/2E_{\text{i}}(2\pi)^3\longrightarrow[d^3\boldsymbol{p}_{\text{i}}/(2\pi)^3]\,dp_{4i}[\delta(p_i^2-m^2)]$$
$$=d^4p_{\text{i}}/(2\pi)^4[2\pi\delta(p_{\text{i}}^2-m^2)]$$

となる。

これらの因子を集めれば，最終的に

$$\text{Prob./sec}=[|M_{\text{fi}}|^2/\prod_{\text{in}}(2E)](2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_{\text{in}}p-\sum_{\text{out}}p)$$

$$\times\prod_{\text{out}}(2\pi)\delta(p_i^2-m_i^2)[d^4p_i/(2\pi)^4]$$

となる。$\delta^{(4)}(\sum_{\text{in}}p-\sum_{\text{out}}p)$ という因子は，全体のエネルギー・運動量保存に対応する。

いつでも座標空間と運動量空間の間を移り変わることにしよう。ここでの方式は

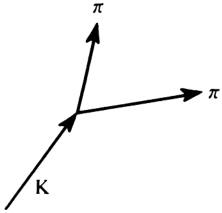
$$\varphi(x)=\int u(p)\exp(-ip\cdot x)[d^4p/(2\pi)^4]$$

$$\varphi(p)=\int\exp(ip\cdot x)\varphi(x)\,d^4x$$

となる。この方式で，dp には必ず $1/2\pi$ が，そして δ 関数には 2π が付く。

もう 1 つ，しておくべき重要な注意がある。この方法の最大の効用は，M が不変的となることである。だから，M を計算するのに都合のよい系を選ぶことができる。

例として，粒子の崩壊を考えよう。運動しているときは崩壊の確率が M/E の因子だけ小さくなるが，もちろんこれは相対論的な時間の伸びである。のちほど詳しく取り扱うが，読者に次の例を試みることを勧めたい。ケイオンが 2 個の π に崩壊する過程



を考えよう（いまのところ電荷は忘れる）。K と π はスピン 0 であり，振幅は u_K，u_πである。この過程の振幅を

$$M=(4\pi)^{1/2}fM_K u_K u_\pi^* u_\pi^*$$

と仮定しよう。$(4\pi)^{1/2}$という因子は方式によるものであり（有理単位系），f は相互作用の強さを表し，M_K は f を無次元にするために挿入された。u はどのような過程かを思い出させるだけで（u^* は粒子を創り，u は粒子を消す），計算では 1 におく。実験的な寿命を与える f の値を求めよ。

16

終状態密度

Density of Final States

一般的に，入射状態としては (1) 粒子の崩壊 (遷移確率/sec = 1/平均寿命) と，(2) 2 粒子の衝突 (遷移確率/sec = σv, ただし σ は断面積, v は相対速度) の 2 つの場合だけを考えればよいであろう。

毎秒当たりの遷移確率を

$$\text{prob. trans./sec} = 2\pi \left(M^2 \prod_{\text{in}} 2E \prod_{\text{out}} 2E\right) D$$

の形に書く。ここで

$$D = (1/2\pi)(2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{\text{in}} p - \sum_{\text{out}} p\right)$$
$$\times \prod_{\text{out}} \{(2\pi)(2E)\delta(p^2 - m^2)[d^4p/(2\pi)^4]\}$$

は単位領域当たりの状態密度である。このほかにも D に対して有用な表現がある。

(1) 2 個の外向き粒子：

$$D = \frac{E_1 E_2}{(2\pi)^3} \frac{p_1{}^3 d\Omega_1}{E_T p_1{}^2 - E_1(\boldsymbol{p}_T \cdot \boldsymbol{p}_1)} \qquad \begin{aligned} E_T &= E_1 + E_2 \\ \boldsymbol{p}_T &= \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \\ E_1 &= (p_1{}^2 + m_1{}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

$m_2 \to \infty$ ならば，$D = [E_1 p_1/(2\pi)^3] d\Omega_1$ となる。質量中心系では

$$D = [1/(2\pi)^3][E_1 E_2/(E_1 + E_2)] p_1 d\Omega_1$$

となる。

(2) 3 個の外向き粒子：

$$D = \frac{E_2 E_3}{(2\pi)^6} \frac{p_2{}^3 p_1{}^2 dp_1 d\Omega_1 d\Omega_2}{p_2{}^2(E_T - E_1) - E_2 \boldsymbol{p}_2 \cdot (\boldsymbol{p}_T - \boldsymbol{p}_1)} \qquad \begin{aligned} E_T &= E_1 + E_2 + E_3 \\ \boldsymbol{p}_T &= \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 \end{aligned}$$

$m_3 \to \infty$ ならば，

$$D=[1/(2\pi)^6]E_2p_2p_1{}^2dp_1d\Omega_1d\Omega_2$$

となる。

ここで，前章で示唆しておいたケイオンの2個のパイオン崩壊を考えよう。使う方法を説明する目的だけなので，直接的な結合 K → π，π が，現実にある基本的な結合であるとは思っていない。単位系について一言：$\hbar=c=1$ の単位系を選んでいる。したがって，

$$m=\text{質量}=\text{エネルギー}=1/\text{長さ}=1/\text{時間}$$
$$=m\quad=mc^2\qquad=1/(\hbar/mc)=1/(\hbar/mc^2)$$

となる。電子に対しては

$$m_e=9.1\times10^{-28}\text{g}=0.511\text{MeV}=1/3.89\times10^{-11}\text{cm}$$
$$=1/1.288\times10^{-21}\text{sec}$$

となる。これらの数はおぼえておくべきである。陽子に対しては，すべての数に 1836 をかければよく，同様に質量 m の粒子に対しては m/m_e倍すればよい。

計算が終わったあとで m がどの単位であるかはいつでも明らかであろう。次元がチェックでき，たとえば寿命は m に比例する。$\hbar$や c をいつまでも残すのは時間の浪費である。

まず最初は計算をゴリゴリと実行しよう。すると，

$$M=(4\pi)^{1/2}fM_Ku_{\pi_1}^*u_{\pi_2}^*u_K\qquad m_1=m_2=m_\pi$$
$$\text{prob./sec}=1/\tau=(4\pi f^2M_K^2/2M_K)(2\pi)^4\delta^4(p_K-p_1-p_2)2\pi\delta(p_1{}^2-m_\pi{}^2)$$
$$\times[d^4p_1/(2\pi)^4](2\pi)\delta(p_2{}^2-m_\pi{}^2)[d^4p_2/(2\pi)^4]$$

となる。

$p_2=p_K-p_1$とおいて，$(2\pi)^4\delta^4(p_k-p_1-p_2)$ と $d^4p_2/(2\pi)^4$が消し合える。(K の静止系で) $p_1=(E,\ \mathbf{p})$，$p_K=(M_K,\ \mathbf{0})$ としよう。このとき，

$$(p_K-p_1)^2=p_K^2-2p_K\cdot p_1+p_1^2=M_K{}^2-2M_KE+m_\pi^2$$

であり，

$$\text{崩壊の割合}=1/\tau=(2\pi)f^2M_K(2\pi)\delta(E^2-p^2-m_\pi^2)$$
$$\times2\pi\delta(M_K^2-2M_KE)[p^2dp\ d\Omega\ dE/(2\pi)^4]$$

となる。さらに，

$$\int 2\pi\delta(M_K^2-2M_K E)\,dE=2\pi/2M_K \qquad E=M_K/2$$

$$\int 2\pi\delta[(M_K^2/4)-p^2-m_\pi^2]p^2dp=(2\pi/2)p \qquad p=[(M_K^2/4)-m_\pi^2]^{1/2}$$

$$\int d\Omega=4\pi$$

であるから，

$$1/\tau=2\pi f^2 M_K\pi[(M_K^2/4)-m_\pi^2]^{1/2}(\pi/M_K)[4\pi/(2\pi)^4]$$
$$=(f^2/4)M_K[1-(2m_\pi/M_K)^2]^{1/2}$$

となる。

物理の目的というものは，小数点つきのある数，などを見つけ出すことである。さもなければ，何をやったことにもならない。これが

$$1/\tau=f^2[(966\times0.84)/4\times(1288\times10^{-21})\sec]$$

となることを示せ。

実験的には K の寿命は 0.99×10^{-10}sec であり，その 78%だけが 2π に崩壊する。したがって，

$$1/\tau_{\rm exp}=0.78/0.99\times10^{-10}\sec$$

であり，

$$f=7.38\times10^{-7}$$

となる。この値はきわめて小さな無次元定数であり，弱い結合を対象としていることになる。強調したいのは，この例は説明するためにわかりやすく作ったものに過ぎず，この形の結合がこの崩壊の真の機構ではない。実際は，むしろ，何か別の結合の間接的な効果によって崩壊している。しかし，これでやって行こう。

●

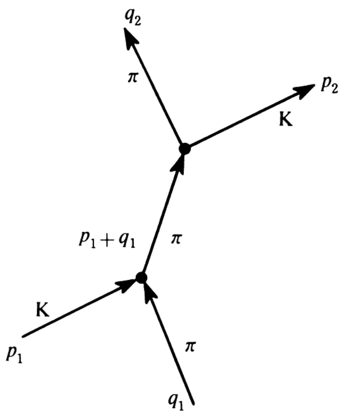
問題 16-1　K は 3π にも崩壊する。そこで

$$(4\pi)^{1/2}g u_{\pi_1}^* u_{\pi_2}^* u_{\pi_3}^* u_K$$

のような結合を仮定しよう。スペクトル分布を求め，実験結果とチェックし，g を決定せよ。

●

ところで，もう少しむずかしい問題である π-K 散乱を考えてみよう。K と π の電荷を忘れたとして，図 16-1 にこの過程が起こりうる 1 つの方法を示す。これは仮想的な π を含む間接過程である。ここで，そのような過程に対する振幅を作る規則を提示しよう（あとでもっと適切なものにする）。



〈図 16-1〉

粒子の世界線に沿って（順に右から左へと）以下の各因子を書いてゆく：

(1) バーテックスごとに振幅 $(4\pi)^{1/2}fM_K$

(2) 2 つのバーテックス間の伝搬に対し振幅 $1/(p^2-m_\pi^2)$。ただし，p は π の 4 元運動量，m_πは質量である。また，これは運動方程式の逆数である。

(3) 各バーテックスでエネルギー・運動量が保存しなければならない。

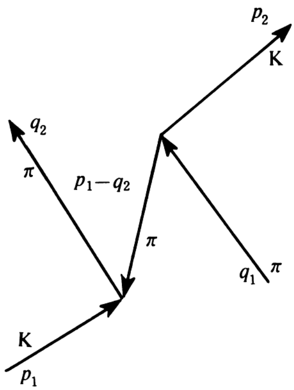
そして，これらの積がこの過程の振幅 M となる。

図 16-1 に対しては

$$(4\pi)^{1/2}fM_K\{1/[(p_1+q_1)^2-m_\pi^2]\}(4\pi)^{1/2}fM_K$$

となる。

しかしながら，図 16-2 に示すように同じ過程が起こるにも別の方法があ



〈図 16-2〉

り，これは最初のダイアグラムとは位相的に別物である（時空間でバーテックスを動かしても最初のダイアグラムにはできない)。この過程の振幅は

$$(4\pi)^{1/2}fM_{\mathrm{K}}\{1/[(p_1-q_1)^2-m_\pi{}^2]\}(4\pi)^{1/2}fM_{\mathrm{K}}$$

となり，2 つを加えて，この遷移の全振幅 M

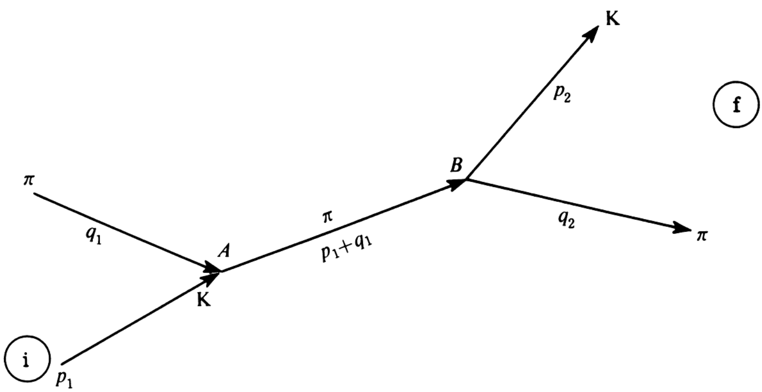
$$M=4\pi f^2M_{\mathrm{K}}{}^2(\{1/[(p_1+q_1)^2-m_\pi^2]\}+\{1/[(p_1-q_2)^2-m_\pi^2]\})$$

を得る。

17
スカラー粒子の伝搬

The Propagator for Scalar Particles

伝搬関数の規則を，読者がすでに知っていることと結び付けて，そんなに不自然な形でなく導いてみよう。π-K 散乱の例を考える（図 17-1)。



〈図 17-1〉

すでに振幅が

$$M = B_{\mathrm{fp}}[1/(p^2 - m^2)]A_{\mathrm{pi}}$$

の形をしていることを述べておいた。ここで通常の摂動論の最低次の項

$$\sum_{\mathrm{n}} H_{\mathrm{fn}}[1/(E_{\mathrm{i}} - E_{\mathrm{n}})]H_{\mathrm{ni}}$$

を考えよう。中間状態 n について和をとっている。図 17-1 のダイアグラムからの寄与は

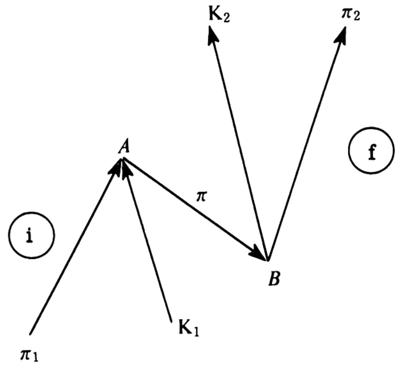
$$E_{\mathrm{P}} = (\boldsymbol{p}^2 + m^2)^{1/2} \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q}_1$$

として，

$$B_{fp}[1/(E_l-E_p)]A_{pl}$$

となる。

しかしながら，通常の摂動論では時間の向きを逆にした過程は，まず対生成，そして入射電子と陽電子の対消滅として別個に考慮されるということを思い出してほしい。したがって，中間状態のエネルギーは $2E_l+E_p$ である（図17-2）。



〈図17-2〉

以前に述べた規則，入口，出口状態については，f(i) を入口（出口）状態と見ることを思い出してほしい。そこで，

$$A_{pl}\{1/[E_l-(2E_l+E_p)\}B_{fp}=-B_{fp}[1/(E_l+E_p)]A_{pl}$$

を得る。

関係する 2 つの行列要素の和は

$$2E_pB_{fp}\{1/(E_l^2-E_p^2)]A_{pl}$$

となる。ここで，

$$\begin{aligned} p^2-m^2 &= (p_1+q_1)^2-m^2 \\ &= (\varepsilon_1+E_1)^2-\boldsymbol{p}^2-m^2 \\ &= E_l^2-E_p^2 \end{aligned}$$

であり，$2E_p$ はまさに規格化定数である。したがって，時間に逆行するというアイデアによって結果が簡単になる。これらの各項は（ひとつひとつ考えれ

ば）不変的でない。それらをまとめると，明らかに不変的な表現になる。この説明は問題にしている伝搬関数の規則の証明を目的としたわけでなく，出てくる物理的表記法を示したものである。

伝搬関数の規則を得るには別の方法がある。自由粒子の特解は

$$u\exp(-ip\cdot x) \qquad p^2=m^2$$

である。自由粒子の任意解は和

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\sum_p u(\boldsymbol{p})\exp(-ip\cdot x)$$

で作れる。ここで

$$\sum_p(p^2-m^2)u(\boldsymbol{p})\exp(-ip\cdot x)=0$$

となることに注意する。しかし，これは

$$\sum\{[i(\partial/\partial t)]^2-(-i\nabla)^2-m^2\}u(\boldsymbol{p})\exp(-ip\cdot x)$$
$$=[(i\nabla_\mu)^2-m^2]\varphi=0$$

となることと同じであり，あるいは

$$\Box^2\equiv\nabla^2-(\partial^2/\partial t^2)$$

とすれば，

$$(\Box^2-m^2)\varphi=0$$

となる。

粒子のソース $S(\boldsymbol{x},t)$ があるとしよう。そのとき，

$$(\Box^2-m^2)\varphi(\boldsymbol{x},t)=S(\boldsymbol{x},t)$$

であるとする。フーリエ変換

$$S(\boldsymbol{x},t)=\int\exp(-ip\cdot x)S(p)[d^4p/(2\pi)^4]$$
$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\int\exp(-ip\cdot x)\varphi(p)[d^4p/(2\pi)^4]$$

を導入してこの方程式を解く。[ここではもはや自由粒子を扱っているわけではないので，$p_4\neq(p^2+m^2)^{1/2}$であることに注意せよ。]

変換された方程式は

$$(p^2-m^2)\varphi(p)=S(p)$$

となる。だから，ソースがわかっていれば

$$\varphi(p)=[1/(p^2-m^2)]S(p)$$

となり，伝搬関数の起源を示している。$\varphi(\boldsymbol{x},t)$ について解けば，

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \int \exp(-ip\cdot x)[1/(p^2-m^2)]\int \exp(-ip\cdot x')\,S(x')\,d^4x' \times [d^4p/(2\pi)^4]$$

あるいは

$$\varphi(x) = \int D_+(x-x_+)\,d^4x'$$

となる。ここで

$$D_+(x-x') = \int [\exp(-ip)\cdot(x-x')][1/(p^2-m^2)][d^4p/(2\pi)^4]$$

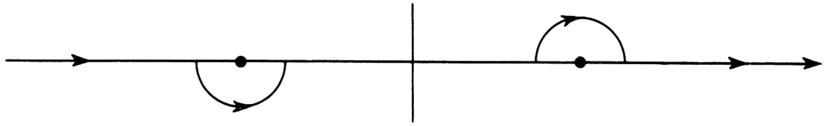
が時空間における伝搬関数である。

D_+に意味を与えるには，非積分関数の中の極を定義する必要のあることに注意しなければならない。これを実行するために，質量（不変量）に無限小の負の虚数部分を加え，まずはじめに $d\omega = dp_4$で積分する：

$$\int \frac{\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\exp[-i\omega(t-t')]}{\omega^2-\boldsymbol{p}^2-m^2+i\epsilon}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$$

$\epsilon\to 0$ の極限はそのあとでとるものとする。

このように規定すると，極を$\omega = \pm E_p = \pm(\boldsymbol{p}^2+m^2)^{1/2}$から$\omega = \pm E_p \mp i\epsilon$へ移動することになるが，それは積分路を図 17-3 のようにとることと等価である。



〈図 17-3〉

$t > t'$に対しては積分路を下半面で閉じる。したがって，

$$D_+(t>t') = -2\pi i\,\mathrm{Res}(E_p) = i\int[\exp(iE_p)(t-t')E_p] \times \exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')][d^3\boldsymbol{p}/(2\pi)^3]$$

となる。$t > t'$では正エネルギーだけが寄与することに注意せよ。$t < t'$に対しては積分路を上半面で閉じる。そうすると

$$D_+(t<t') = i\int[\exp(iE_p(t-t')E_p]\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')][d^3\boldsymbol{p}/(2\pi)^3]$$

を得るが，これは $t<t'$ では負エネルギーだけが寄与することを示している。このようにして，$m \to m-i\epsilon$ とおけば，時間に逆行したり，順行したりするやり方をまとめたものとなっていることがわかる。

最後に，スピン 0 の粒子の伝搬関数の正しい形は

$$1/(p^2-m^2+i\epsilon)$$

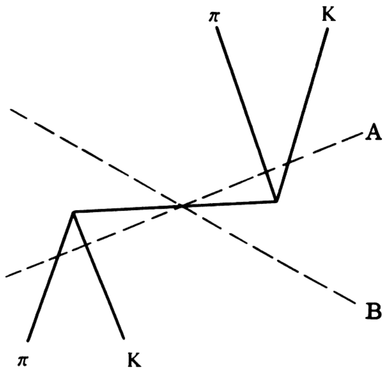
となる。

18

配置空間における伝搬関数

The Propagator in Configuration Space

K-π 散乱の例で，通常の2次の摂動論で振幅に対するひとつひとつの寄与は相対論的に不変でないが，それらの和は不変であることを知った。AとBという2つのローレンツ系は，時空間の回転によって関係している。たとえば，図18-1のAとBの状況では，連続して起こる2つの相互作用の順序が異なる。このようなことは，最初のバーテックスの光円錐の中に2番目のバーテックスが入っていない場合に可能になる（そうでなければ時間順序はローレンツ変換で反対にはできない）。



〈図 18-1〉

時間的でなく，空間的に2つの事象が分けられている場合には振幅が0ではないかと思うかもしれない。実はそうではない。あらゆる時空点が寄与するのである。

これが本当であることを見るために，配置空間における伝搬関数

$$D_+(x)=\int[\exp(-ip\cdot x)/(p^2-m^2+i\epsilon)][d^4p/(2\pi)^4]$$

の性質を調べてみる。光円錐に対して，$D_+(x)$ はどのように変わるのであろうか？　運動量空間に比べ，配置空間では伝搬関数ははるかに複雑である。具体的には

$$D_+(x)=-(1/4\pi)\delta(s^2)+(m/8\pi s)H_1^{(2)}(ms)$$

であるが，s は

$$s=(t^2-\boldsymbol{x}^2)^{1/2},\qquad t^2>\boldsymbol{x}^2$$
$$=-i(t^2-\boldsymbol{x}^2)^{1/2}\qquad t^2<\boldsymbol{x}^2$$

$H^{(2)}$は第 2 種のハンケル関数である[9]。s が大きいときには

$$D_+\simeq(m/2)(1/2\pi s)^{3/2}\exp(-ims)$$

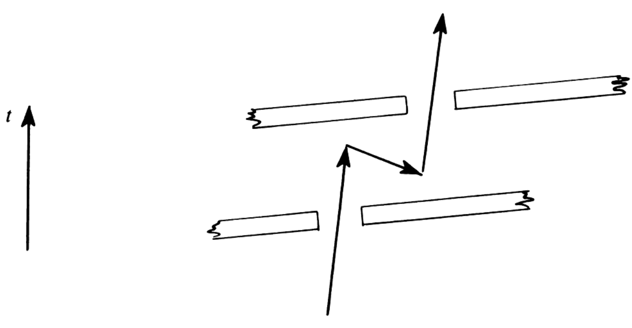
となる。低速では $s\simeq t-\boldsymbol{x}^2/2t$ を使えば

$$D_+\propto\exp(-imt)\exp[i(m\boldsymbol{x}^2/2t)]/t^{3/2}=\exp(-imt)\psi_{\mathrm{s}}$$

となることに注意せよ。ただし，ψ_{s}はシュレーディンガー方程式の解である。光円錐の外，$\boldsymbol{x}^2>t^2$では D_+は指数的にゼロになる：

$$D_+\propto\exp(-m\sigma),\qquad \sigma=(\boldsymbol{x}^2-t^2)^{1/2}$$
$$\to\exp(-mr)\qquad t^2\ll\boldsymbol{x}^2=r^2$$

物理的に説明するために，電子の位置を，たとえばシャッターで測定するとしよう。同時にではあるが，別の位置で電子があるかないかを測定する（図 18-2）。この確率はゼロではない。というのは，測定という操作によって，電子-陽電子対が創られ，陽電子がはじめの電子と対消滅するからである。この

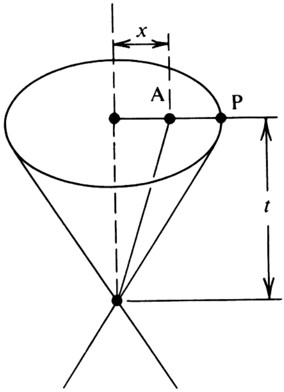


〈図 18-2〉

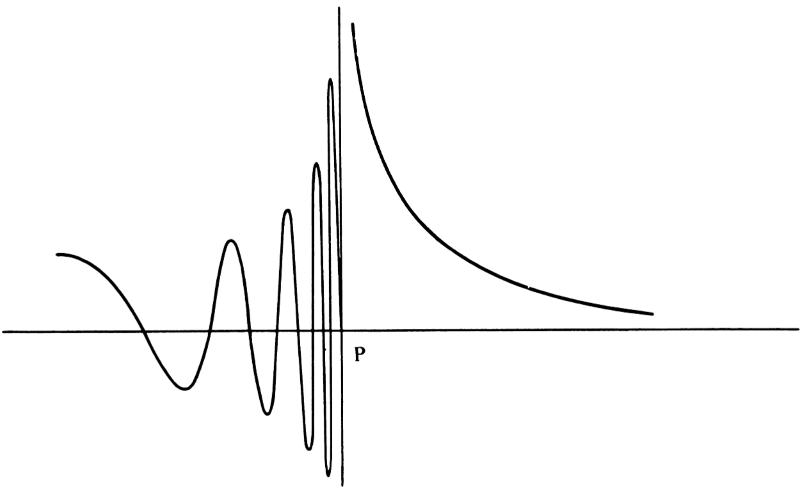
思考実験は，このアイデアがまちがっていると思ったパウリが工夫したものである。

今度は高速粒子を考える；図 18-3 を参照。

経路 AP に沿って光円錐を横切るとき，振幅の様子を考えてみよう（図 18-4)。このとき，(たとえば) 点 P における波数は古典的速度 x/t に対応しているであろうか？



〈図 18-3〉



〈図 18-4〉

$$\exp[-im(t^2-x^2)^{1/2}]$$

の位相を調べてみよう。x が波長 λ だけ変化すると，位相は 2π だけ変わる：

$$m[t^2-(x+\lambda)^2]^{1/2}-m(t^2-x^2)^{1/2}=2\pi$$

あるいは（$m\lambda \ll 1$ として）

$$m\lambda(\partial/\partial x)(t^2-x^2)^{1/2}=2\pi$$

である。したがって，

$$2\pi/\lambda=K=m(x/t)/[1-(x/t)^2]^{1/2}=mv_{\text{class}}/(1-v^2_{\text{class}})^{1/2}$$

となる。

$x \to t(v \to c)$ となるにつれ，光円錐上の δ 特異性に近づくことがわかる。これに対する物理的理由としては，あらゆる運動量が寄与するが，多くは v が c に近い運動量であり，したがって光円錐近傍に振幅が大量にたまるからであると言えよう。

スピン 0 ボソン場の方程式を

$$(\Box^2-m^2)\varphi=S$$

と書いた。ここで S が何であるかを考えねばならない。つまり，何が粒子φを生成するのか？　結合

$$(4\pi)^{1/2}fM_{\text{K}}\varphi_\pi\varphi_\pi\varphi_{\text{K}}$$

を持つ π-K の例を考えてみる。$f'=(4\pi)^{1/2}fM_{\text{K}}$とおけば，$\varphi_\pi$と$\varphi_{\text{K}}$に対する方程式は

$$(\Box^2-m^2)\varphi_\pi=2f'\varphi_\pi\varphi_{\text{K}}$$
$$(\Box^2-m^2)\varphi_{\text{K}}=f'\varphi^2_\pi$$

となる。

これらの結果は最小作用の原理から得られる。作用

$$S=(1/2)\int[(\nabla_\mu\varphi_\pi)^2-m^2_\pi\varphi^2_\pi]d^4\tau$$
$$d^4\tau\equiv dx\ dy\ dz\ dt$$

を考えよう。φ_πで変分し，（表面項を無視して）部分積分し，$\delta S=0$ とおくと方程式

$$-\nabla^2_\mu\varphi_\pi-m^2\varphi_\pi=0$$

が得られるが，これは自由パイオンに対する方程式である。

π-K の例では，自由な K に対する同様な項と相互作用項を加える：

$$S=\int\{(1/2)[(\nabla_\mu\varphi_\pi)^2-m_\pi^2\varphi_\pi^2]+(1/2)[(\nabla_\mu\varphi_K)^2-m_K^2\varphi_K^2]+f'\varphi_\pi^2\varphi_K\}d^4\tau$$

φ_πとφ_Kについて変分すると，上記の方程式が得られる。(ここでは暗黙のうちに中性粒子を記述する実数場を仮定した——一般化は容易である。)

より一般的には，作用

$$S=\int\mathcal{L}\,d^4\tau$$

があるとする。ここで，ラグランジアン密度$\mathcal{L}$は相対論的に不変でなければならない。この要請のために，可能なラグランジアンの数が非常に限定される。通常の古典的な形との関係は

$$S=\int L\,dt,\quad ただし\ L=\int\mathcal{L}\,d^3\boldsymbol{x}$$

であることに注意せよ。

作用がより基本的な量であると考えられる。作用から，伝搬関数の規則，結合や運動方程式が直接に導ける。しかし，ダイアグラムの規則についての理由や，なぜSから伝搬関数が得られるのかについては，まだわかっていない。

19

スピン 1 の粒子

Particles of Spin 1

一般に，ローレンツ変換の下で線形に変換する振幅を見つけたい：

$$u' = \mathscr{D}(L)u \qquad (L = \text{ローレンツ変換})$$

ここで

$$\mathscr{D}(L_1L_2) = \mathscr{D}(L_1)\mathscr{D}(L_2)$$

である。

1 つの解はスカラーである。他の解も容易に見つかる。4 元ベクトルは線形に変換する——したがって，おそらく 4 元ベクトルは可能な解である。回転に対しても同様であって，角運動量 1 を表す 3 次元ベクトルが許されたことに注意したい。したがって，4 元ベクトルの振幅で粒子を表せる。それはスピン 1 を持つと思える。しかしながら，1 つだけ困ったことがある：回転では，空間成分はベクトルのように変換するが，時間成分はスカラーのように変換する。したがって，あたかも 2 種類の粒子を記述しているように見える。この困難は

$$p_\mu u_\mu = 0$$

を要請することによって，克服できる。こうすると，粒子の静止系（$\boldsymbol{p}=0$）で，

$$mu_4 = 0 \qquad \text{または} \qquad u_4 = 0$$

となる。

光子

光子はスピン 1 で唯一知られている素粒子である[†]。0 質量を持つ。光子の伝搬の規則と他の粒子に対する結合がわかれば，電気力学のあらゆることが

わかる。この理論の古典極限がマクスウェル方程式に対応すべしという要請が，これらの規則を作るのにきわめて有用なガイドとなる。

量子電気力学で光子を発見する振幅は4元ベクトルポテンシャル $A_\mu(x, y, z, t)$ であると考えられ，ソースがないときには方程式

$$\Box^2 A_\mu = 0 \tag{19-1}$$

$$\nabla_\mu A_\mu = 0 \tag{19-2}$$

を満たす。

自由光子は平面波

$$\varepsilon_\mu \exp(iK \cdot x)$$

で表され，ε_μは偏極ベクトルと呼ばれる。(19-1) 式に代入すると，$K^2=0$，つまり，$m=0$ となることがわかり，(19-2) から $K_\mu \varepsilon_\mu = 0$，すなわち，偏極は K_μに垂直であることがわかる。

理論はゲージ不変でなければならない。つまり，誰かが A_μで問題を解き，別の人が $A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \chi$ で解くとすると，両者は同一の物理的結果を得なければならない。ただし，$\Box^2 \chi = 0$ である。この要請は，平面波の場合次のようになる：運動量 K，偏極 ε の光子を $A_\mu = \varepsilon_\mu \exp(iK \cdot x)$ で表し，

$$\chi = -i\alpha \exp(iK \cdot x) \qquad \alpha = 定数$$

としよう。すると，

$$A'_\mu = \varepsilon'_\mu \exp(iK \cdot x) \qquad \varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu + \alpha K_\mu$$

となる。

したがって，2個の偏極ベクトルが4元運動量の倍数だけしか違わないときには，同一の光子を表すこととなる。適当なゲージ変換によって，常に $\varepsilon_4 = 0$ に選べる。$\varepsilon_4 \neq 0$ と仮定しよう。

$$\alpha = -\varepsilon_4 K_4$$

に選べば，

$$\varepsilon'_4 = \varepsilon_4 - (\varepsilon_4 / K_4) K_4 = 0$$

---

†〔訳注〕現在では標準標型におけるスピン1のゲージボソンとして，光子の他に弱ボソン $W^\pm$，Z^0，そしてグルーオンがある。また，クォーク・反クォーク結合状態のハドロンである ρ，ω，K^*，ϕ などのボソンもスピン1である。

となり，

$$K_\mu \varepsilon'_\mu = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' = 0$$

である。したがって，自由光子は2個の偏極状態だけによって表せる。これらを，運動量に垂直な任意の2方向に選べるし，あるいは右-と左-円偏光に分解できる（第2章を参照）。RHC（LHC）は光子の運動量に沿って平行（反平行）のスピン1状態に対応する。このことは次のようにしてわかる：$\boldsymbol{\varepsilon}_x$，$\boldsymbol{\varepsilon}_y$を伝搬方向に垂直な2つの単位ベクトルとして

$$u_{\mathrm{RHC}} = [1/(2)^{1/2}](\boldsymbol{\varepsilon}_x + i\boldsymbol{\varepsilon}_y)$$

である。z 軸のまわりに θ だけ回転すると，

$$u'_{\mathrm{RHC}} = [1/(2)^{1/2}](\boldsymbol{\varepsilon}'_x + i\boldsymbol{\varepsilon}'_y)$$

となる。ここで

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x \cos\theta + \boldsymbol{\varepsilon}_y \sin\theta$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_y = -\boldsymbol{\varepsilon}_x \sin\theta + \boldsymbol{\varepsilon}_y \cos\theta$$

である。u'_{RHC}に代入すると，$u'_{\mathrm{RHC}} = \exp(-i\theta)\, u_{\mathrm{RHC}}$ を得る。同様に，

$$u'_{\mathrm{LHC}} = \exp(i\theta)\, u_{\mathrm{LHC}} \qquad u_{\mathrm{LHC}} = [1/(2)^{1/2}](\boldsymbol{\varepsilon}_x - i\boldsymbol{\varepsilon}_y)$$

となる。

ここで回転行列が $\exp(-i\theta J_z)$ であることを思い出そう。すると

$$J_z u_{\mathrm{RHC}} = u_{\mathrm{RHC}}$$

$$J_z u_{\mathrm{LHC}} = -u_{\mathrm{LHC}}$$

となる（証明終わり）。次に，光子の結合と伝搬の規則を見つけよう。

ミニマル電磁結合の原理

荷電粒子の運動方程式が知られているときにはいつでも，その粒子と光子の結合を求めることができる非常に興味深い原理がある。たとえば，自由スカラー粒子に対する方程式

$$(i\nabla_\mu\, i\nabla_\mu - m^2)\,\varphi = 0$$

を考えよう。このとき，その規則は $i\nabla_\mu$ を $i\nabla_\mu - eA_\mu$に変えることである。こうすると，電磁場の効果を含んだ方程式

$$[(i\nabla_\mu - eA_\mu)(i\nabla_\mu - eA_\mu) - m^2]\varphi = 0$$

が得られる。この原理は方程式をゲージ不変にしていると気づくことが重要

である。φに対して

$$\varphi=\exp(ie\chi)\,\varphi'$$

としてみよう。するとφ'はA_μを$A_\mu+\nabla_\mu\chi$で置き換えたφと同じ方程式を満たす。しかし，φとφ'は位相だけしか違わず(しかし，位相は時空に依存してもよい)，その結果両者は同一の物理状態を表している。

φに対する方程式は

$$(i\nabla_\mu i\nabla_\mu-m^2)\,\varphi=e[i\nabla_\mu\,(A_\mu\varphi)+A_\mu(i\nabla_\mu\,\varphi)]-e^2A_\mu A_\mu\varphi$$

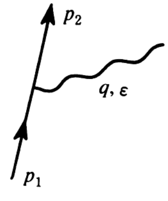
の形に書ける。右辺はスカラー場のソースである。基本過程の振幅に対する規則が次のように得られる：運動量p_1の粒子［$\varphi_1=\exp(-ip_1\cdot x)$］が運動量$q$,偏極$\varepsilon$の光子［$A_\mu=\varepsilon_\mu\exp(iq\cdot x)$］を放出して,運動量$p_2$となっていく［$\varphi_2^*=\exp(ip_2\cdot x)$］振幅は

$$\begin{aligned}e\int&\varphi_2^*[i\nabla_\mu\,(A_\mu\varphi_1)+A_\mu(i\nabla_\mu\,\varphi_1)]d^4x\\ &=e\int\exp(ip_2x)\{i\nabla_\mu[\varepsilon_\mu\exp(iq\cdot x)\exp(-ip_1\cdot x)]\\ &\qquad\qquad+\varepsilon_\mu\exp(iq\cdot x)\,i\nabla_\mu\exp(-ip_1\cdot x)\}d^4x\\ &=e\,(p_1-q+p_1)\cdot\varepsilon\int\exp[i\,(p_2+q-p_1)\cdot x]d^4x\end{aligned}$$

に比例する。最後の因子はバーテックスでエネルギー・運動量が保存する，つまり，$p_2+q=p_1$であることを表している。もし光子が吸収されるならば，qを$-q$で置き換える。

いずれの場合も振幅は

$$\text{Amp.}=-i\,(4\pi)^{1/2}\,e\,(p_2+p_1)\cdot\varepsilon$$



で与えられる。

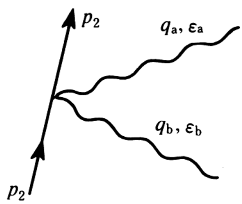
因子 $(4\pi)^{1/2}$ は e が$\hbar=c=1$ の非有理化結合定数 $e^2=1/137$ となるように導入されている。$-i$ という因子は結合定数の高次項で区別不可能な過程が含まれる場合に，位相関係を正しく保つのに本質的であるが，そうでないときには取りはずしてよい。

e の2次の項は2個の光子を同時に放出（吸収）する振幅を与える。この振幅は

$$
\begin{aligned}
&e^2\int\varphi_2^* A_\mu A_\mu \varphi_1 d^4x \\
&= e^2\int \exp(ip_2\cdot x)[\varepsilon_\mu^{\rm a}\exp(iq_{\rm a}\cdot x)\,\varepsilon_\mu^{\rm b}\exp(iq_{\rm b}\cdot x)+\varepsilon_\mu^{\rm b}\exp(iq_{\rm b}\cdot x) \\
&\qquad\qquad\times\varepsilon_\mu^{\rm a}\exp(iq_2\cdot x)]\exp(-ip_1\cdot x)\,d^4x \\
&= e^2(\varepsilon_{\rm a}\cdot\varepsilon_{\rm b}+\varepsilon_{\rm b}\cdot\varepsilon_{\rm a})\int\exp[i(p_2+q_{\rm a}+q_{\rm b}-p_1)\cdot x]d^4x
\end{aligned}
$$

に比例する。2個の A_μ のうちのいずれもが光子a，あるいはbを放出しうるので，$\varepsilon_{\rm a}\cdot\varepsilon_{\rm b}$ という因子が2度出てくる。ここでも最後の因子は $p_2+q_{\rm a}+q_{\rm b}=p_1$ という4元運動量の保存を表している。ということで振幅は

$$\text{Amp.}=-i4\pi e^2(\varepsilon_{\rm a}\cdot\varepsilon_{\rm b}+\varepsilon_{\rm b}\cdot\varepsilon_{\rm a})$$



となる。

ここで再び，振幅の規則と古典的運動方程式との関係は発見法的なものにしか過ぎないことを強調しておきたい。マクスウェル方程式から量子電気力学を“導く”ことは明らかに不可能であり，マクスウェル方程式はガイドとして役立つだけである。

別のやり方として，自由スカラー場 φ のラグランジアン密度

$$\mathscr{L}_{\rm F}=-(i\nabla_\mu\varphi)^*(i\nabla_\mu\varphi)+m^2\varphi^*\varphi$$

から始めることもできよう。$i\nabla_\mu\to i\nabla_\mu-eA_\mu$ と置き換えると，

$$\mathscr{L}=-(-i\nabla_\mu-eA_\mu)\varphi^*(i\nabla_\mu-eA_\mu)\varphi+m^2\varphi^*\varphi$$

を得る。展開して，

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{\rm F}+\mathscr{L}_{\rm C}$$

と書ける。ここで

$$\mathscr{L}_{\rm C}=eA_\mu[(i\nabla_\mu\varphi)^*\varphi+\varphi^*(i\nabla_\mu\varphi)]-e^2A_\mu A_\mu\varphi^*\varphi$$

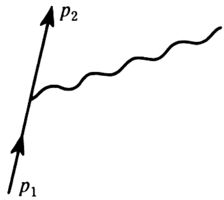
は粒子と光子間の結合による寄与である。この $\mathscr{L}_{\rm C}$ からも，基本過程の振幅に対する規則が導ける。

e の項からは，たとえば，運動量 p_1の粒子$[\varphi_1=\exp(-ip_1\cdot x)]$が運動量 q，偏極 ε の仮想的あるいは実の光子 $[A_\mu=\varepsilon_\mu\exp(iq\cdot x)]$ を放出して，運動量 p_2となっていく $[\varphi_2{}^*=\exp(ip_2\cdot x)]$ 過程のあることがわかる。$\mathscr{L}_c$に代入して，

$$
\begin{aligned}
&e\int\varepsilon_\mu\exp(iq\cdot x)[q_{2\mu}\exp(ip_2\cdot x)\exp(-ip_1\cdot x)\\
&\qquad+\exp(ip_2\cdot x)p_{1\mu}\exp(-ip_1\cdot x)]d^4x\\
&=e[p_2+p_1]\cdot\varepsilon\int\exp[+i(q+p_2-p_1)\cdot x]d^4x
\end{aligned}
$$

が得られる。最後の項から，$p_2+q=p_1$であることがわかる。したがって，振幅は

$$\text{Amp.}=-i(4\pi)^{1/2}e(p_2+p_1)\cdot\varepsilon$$



となる。$(4\pi)^{1/2}$という因子と$-i$ を入れたことはすでに説明した。

e^2の項は 2 個の光子の同時放出に対応する：A_μのうちの 1 個が

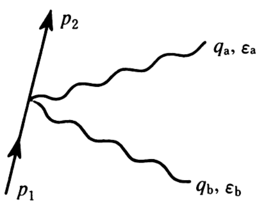
$$\varepsilon_\mu^{\rm a}\exp(iq_{\rm a}\cdot x)\qquad\text{あるいは}\qquad\varepsilon_\mu^{\rm b}\exp(iq_{\rm b}\cdot x)$$

となり，これに対応して，もう一方の A_μが

$$\varepsilon_\mu^{\rm b}\exp(iq_{\rm b}\cdot x)\qquad\text{あるいは}\qquad\varepsilon_\mu^{\rm a}\exp(iq_{\rm a}\cdot x)$$

となる。したがって，この過程の振幅は

$$\text{Amp.}=-i4\pi e^2 2\varepsilon_{\rm a}\cdot\varepsilon_{\rm b}$$



となる。

光子の伝搬関数

光子の伝搬関数も運動方程式から求められる。光子に対する振幅 $A_\mu(x, y,$

z, t) はマクスウェル方程式

$$\nabla_\mu \nabla_\mu A_\nu = j_\nu, \qquad j_\nu \text{は光子のソース}$$

を満たす。

$\nabla_\nu A_\nu = 0$ であるから，$\nabla_\nu j_\nu = 0$ が出てくる；これについてはあとで，もう少し詳しく話そう。第 17 章で述べた方法に従って，

$$A_\mu(x) = \int \varepsilon_\mu(k) \exp(-ik\cdot x)[d^4k/(2\pi)^4]$$
$$j_\mu(x) = \int j_\mu(k) \exp(-ik\cdot x)[d^4k/(2\pi)^4]$$

としよう。微分方程式に代入すると，

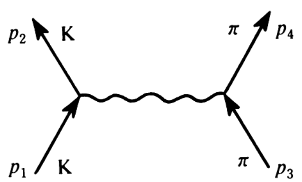
$$-k^2 \varepsilon_\mu(k) = j_\mu(k)$$

を得る。この結果，光子の伝搬関数は

$$-(i/k^2)\,\delta_{\mu\nu}$$

となる。因子 $\delta_{\mu\nu}$によって，どのタイプのソースがどの偏極を生成したのかがわかり，因子 i は結合の中に因子$-i$ があるために入れられている。

例として，光子を介した K-π 散乱を考えよう(図 19-1)。(以前考えた直接的な K$\pi\pi$ 散乱は忘れることにする。)



〈図 19-1〉

全振幅 M は次の 3 個の因子からなる：

(1) 運動量 p_1の K メソンが運動量 p_1-p_2, 偏極 ε の仮想光子を放出する振幅：

$$-i(4\pi)^{1/2}e(p_{1\mu}+p_{2\mu})\,\varepsilon_\mu$$

(2) 光子の伝搬関数の振幅：

$$-i[\delta_{\mu\nu}/(p_1-p_2)^2]$$

(3) 運動量 p_3の π メソンが仮想光子を吸収する振幅：

$$-i(4\pi)^{1/2}e(p_{3\mu}+p_{4\mu})\varepsilon_\mu$$

仮想光子の偏極について4方向すべての和をとると，

$$M=4\pi ie^2\sum_{\text{pol}}(p_{1\mu}+p_{2\mu})\varepsilon_\mu(p_{3\nu}+p_{4\nu})\varepsilon_\nu[\delta_{\mu\nu}/(p_1-p_2)^2]$$
$$=4\pi ie^2(p_1+p_2)\cdot(p_3+p_4)[1/(p_1-p_2)^2]$$

となる†。

あとで，実光子については，考えなければならないのがなぜ2つの偏極だけなのか，その理由を説明しよう。

●

問題

19-1 質量中心系における π^--π^- 散乱行列を求めよ。

19-2 π^--π^+ について同様なことをせよ。

19-3 π^+ に対するコンプトン効果を始状態の π^+ の静止系で求めよ。

19-4 π^+-π^- 対消滅を π^- 静止系で計算せよ。

---

†〔訳注〕この記述法は誤解されやすい。偏極ベクトルは独立なものが4個あり，それを添字 λ で区別すると

$$\varepsilon\longrightarrow\varepsilon_\mu^{(\lambda)},\qquad \lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

となる。ここで

$$\sum_\lambda\varepsilon_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\nu^{(\lambda)}=\delta_{\mu\nu},\qquad \sum_\mu\varepsilon_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\mu^{(\lambda')}=\delta_{\lambda\lambda'}$$

である。これに応じて行列要素の偏極の部分は

$$\sum_{\text{pol}}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\delta_{\mu\nu}\longrightarrow\sum_{\lambda,\lambda'}\varepsilon_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\nu^{(\lambda')}\delta_{\lambda\lambda'}$$
$$=\sum_\lambda\varepsilon_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\nu^{(\lambda)}$$
$$=\delta_{\mu\nu}$$

となる。結果は正しい。

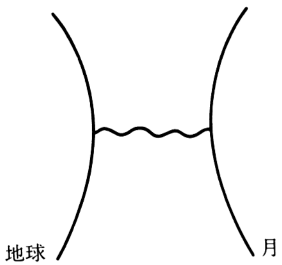
20

仮想光子と実光子

Virtual and Real Photons

光子の仮想的放出と実際の放出の関係を論じよう。たとえば偏極状態について，なぜ実光子は 2 つの横成分だけで考えればよいのに，仮想光子は 4 つの可能な状態すべてについて和をとったのか？

月に光子を送るとしよう。この過程が終了したあとでは図のようなダイアグラムで表せよう。



〈図 20-1〉

ある意味で，ひとつひとつの実光子も充分に長い時間間隔で見れば，実際は仮想的なのである。その光子はどんなときでも宇宙のどこかで吸収されるのである。実光子を特徴づけるものは $k^2 \to 0$（常に実光子であるわけではないので，不確定性原理によって，k^2は恒等的に 0 であるわけではない），したがって，伝搬関数 $1/k^2 \to \infty$ となることである。この議論をさらに進める前に，電荷の保存則を考えなければならない。

電荷の保存

粒子場に光子場を加えた作用 S は，ミニマル電磁相互作用の仮定で与えられる：

$$S=\int d^4x[-\varphi^*(i\nabla_\mu-eA_\mu)^2\varphi+M^2\varphi^*\varphi+1/4(\nabla_\nu A_\mu-\nabla_\mu A_\nu)^2]$$
$$=\int d^4x[-\varphi^*(i\nabla_\mu)^2\varphi+M^2\varphi^*\varphi+1/4(\nabla_\nu A_\mu-\nabla_\mu A_\nu)^2$$
$$+eA_\mu(\varphi^*[i\nabla_\mu-(e/2)A_\mu]\varphi+\{[i\nabla_\mu-(e/2)A_\mu]\varphi\}^*\varphi)]$$

粒子場と光子場の 1 次の変分に関して作用が変化しないと要請すれば，粒子に対する運動方程式

$$(i\nabla_\mu)(i\nabla_\mu)\varphi-M^2\varphi=e[i\nabla_\mu(A_\mu\varphi)+A_\mu(i\nabla_\mu\varphi)]-e^2A_\mu A_\mu\varphi$$

と，光子に対する

$$\nabla_\nu\nabla_\nu A_\mu=e\{\varphi^*(i\nabla_\mu-eA_\mu)\varphi+[(i\nabla_\mu-eA_\mu)\varphi]^*\varphi\}$$

が得られる ($\nabla_\mu A_\mu=0$ という条件を使った)。したがって，電荷-電流ベクトルは

$$j_\mu=e\{\varphi^*(i\nabla_\mu-eA_\mu)\varphi+[(i\nabla_\mu-eA_\mu)\varphi]^*\varphi\}$$

となる。

A の任意の変化に対する作用の 1 次の変化は 0 でなければならない。特に，χ を任意として，$\delta A_\mu=\nabla_\mu\chi$ と変えても場は変化せず，作用の変化は結合の項

$$\int j_\mu\nabla_\mu\chi\,d^4x=-\int\chi\nabla_\mu j_\mu\,d^4x$$

だけである。χ は任意であり，作用のこの変化は 0 となるべきだから，

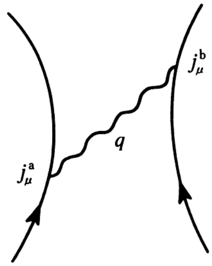
$$\nabla_\mu j_\mu=0$$

でなければならない。これが電荷-電流保存則である。これはゲージ不変性の原理の意味するところであり，ミニマル電磁相互作用でなくとも成立する。

ここで，仮想光子と実光子の関係に戻る。それぞれ，電流 $j_\mu^{\mathrm{a}}(x)$，$j_\mu^{\mathrm{b}}(x)$ を与える 2 粒子 a，b の散乱を考えよう。

運動量 q，偏極 ε の光子を放出する振幅は $j_\mu\varepsilon_\mu$ である。ただし，$j_\mu(q)$ は $j_\mu(x)$ のフーリエ変換である。運動量 $q=(\omega,\ \boldsymbol{Q})$，偏極 ε の光子 1 個の交換による散乱振幅への寄与は

$$M=j_\mu^{\mathrm{a}}(q)\,\varepsilon_\mu(1/q^2)\,j_\nu^{\mathrm{b}}(q)\,\varepsilon_\nu$$



で与えられる。偏極の可能な4方向に関しては，光子の伝搬方向に沿って3-軸があるように時空間軸をとる。偏極について和をとれば

$$M=\frac{j_4^{\mathrm{a}}j_4^{\mathrm{b}}}{\omega^2-Q^2}-\frac{j_3^{\mathrm{a}}j_3^{\mathrm{b}}}{\omega^2-Q^2}-\frac{j_2^{\mathrm{a}}j_2^{\mathrm{b}}}{\omega^2-Q^2}-\frac{j_1^{\mathrm{a}}j_1^{\mathrm{b}}}{\omega^2-Q^2}$$

となる。最後の2項は2つの横偏光光子からの寄与で期待されたものである。それではいったい，はじめからの2項の意味は何であろうか？　電荷-電流保存から

$$q_\mu j_\mu(q)=0$$

あるいは，Q に沿って3-軸をとっているので，

$$\omega j_4-Q\,j_3=0$$

となることが要請される。$j_3=(\omega/Q)j_4$を M に代入すると

$$M=-(j_4^{\mathrm{a}}j_4^{\mathrm{b}}/Q^2)-\sum_{\mathrm{trans}}[(j^{\mathrm{a}}\cdot\varepsilon)(j^{\mathrm{b}}\cdot\varepsilon)/(\omega^2-Q^2)]$$

となることがわかる。

移行された光子が実であれば，$\omega\simeq Q$ である。したがって，縦光子と時間的光子からの M への寄与（第1項）は，横光子からの寄与に比べて0となる。しかしながら，一般的に仮想的な縦光子と時間的光子は無視できず，実際に非常に重要な役割を果たす。この役割が何であるかを見るために，運動量 Q と振動数ωがあらゆる値をとったとき，M の第1項の寄与はどうなるかを座標空間で表してみる。

$$j_4(\boldsymbol{Q},\,\omega)=\int\rho(\boldsymbol{x},\,t)\exp[-i(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]\,d^3\boldsymbol{x}dt \qquad \rho=\text{電荷密度}$$

を代入すると，

$$\int [j_4^{\rm a}(\boldsymbol{Q},\omega)j_4^{\rm b}(\boldsymbol{Q},\omega)/-\boldsymbol{Q}^2][d^3\boldsymbol{Q}d\omega/(2\pi)^4]$$

$$=\int \rho^{\rm a}(\boldsymbol{x}_1,t_1)\rho^{\rm b}(\boldsymbol{x}_2,t_2)\exp\{-i[\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)-\omega(t_1-t_2)]\}/-\boldsymbol{Q}^2 \times[d^3\boldsymbol{Q}d\omega/(2\pi)^4]d^3\boldsymbol{x}_1dt_1d^3\boldsymbol{x}_2dt_2$$

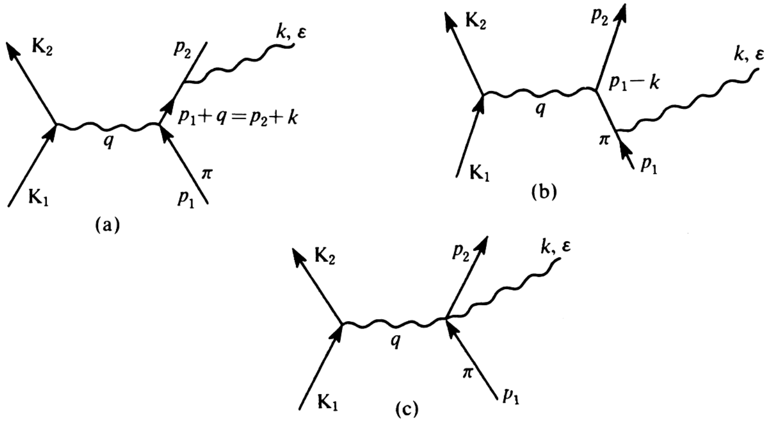
を得る。ωについて積分すると，$2\pi\delta(t_1-t_2)$ が，$\boldsymbol{Q}$ について積分すると $4\pi/|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$が得られるので（$\int \exp[-i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}](d^3\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Q}^2)=4\pi/R$ だから），

$$\int \rho^{\rm a}(\boldsymbol{x}_1,t)\rho^{\rm b}(\boldsymbol{x}_2,t)/|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|dtd^3\boldsymbol{x}_1d^3\boldsymbol{x}_2$$

が得られる。これは2個の荷電粒子間に働く瞬間的なクーロン相互作用である。全体の相互作用としては，横光子の交換も含めると，遅延相互作用が出てくる。

制動輻射

π メソンがスピン0の重い粒子，たとえばKメソンによって散乱するとしよう。そのとき π が光を放出できる。(あとでもっと現実的なスピン1/2の場合を取り扱う。）最低次で数個のダイアグラムがある（図20-2)。それに，Kによって光子が放出される同じようなダイアグラムもある。しかしながら，非常に重いKの場合に興味があり，この場合には，そのようなダイアグラムは無視できることが示せる。



〈図20-2〉

過程 (a), (b), (c) に対する振幅は

$$a=[(4\pi)^{1/2}e]^3(K_1+K_2)\cdot(2p_1+q)(2p_2+k)\cdot\varepsilon\{1/[(p_2+k)^2-m^2]\}\times(-1/q^2)$$

$$b=[(4\pi)^{1/2}e]^3(K_1+K_2)\cdot(2p_2-q)(2p_1-k)\cdot\varepsilon\{1/[(p_1-k)^2-m^2]\}\times(-1/q^2)$$

$$c=(-4\pi e^2)[(4\pi)^{1/2}e](K_1+K_2)\cdot 2\varepsilon(-1/q^2)$$

となる。

$$k\cdot\varepsilon=0 \qquad (p+k)^2-m^2=2p\cdot k$$

であることは直ちにわかることなので，少し簡単になる。

K メソンがはじめ静止しており，かつその質量が $M\to\infty$ である場合を考えよう。そのとき，光子-K メソン・バーテックスでのエネルギー保存から，仮想光子のエネルギーは

$$\omega_{\mathrm{q}}\simeq Q^2/2M\approx 0$$

となることが要請される。さらに K_1 と K_2 は実際上，時間成分 M だけである。

そこで，

$$a=[(4\pi)^{1/2}e]^3 4ME_1(p_2\cdot\varepsilon/p_2\cdot k)(-1/Q^2)$$

$$b=[(4\pi)^{1/2}e]^3 4ME_2(p_1\cdot\varepsilon/-p_1\cdot k)(-1/Q^2)$$

$$c=[(4\pi)^{1/2}e]^3 4M\varepsilon_4(-1/Q^2)$$

を得る。

重い K メソンと π メソンは 0 エネルギーの時間的仮想光子を交換するだけである。このとき，光子の伝搬関数 $1/q^2$ は $1/Q^2$ に等しくなり，静的なクーロン相互作用に対応する。ε が $\varepsilon=\alpha k$ というように k の方向なら，$a+b+c$ が 0 となることから，その和がゲージ不変であることを示せ。ε を空間的に選べば，ダイアグラム (c) は消える。

π メソンがエネルギー ω の光子を立体角 $d\Omega_\omega$ に放出して $d\Omega_2$ に散乱される微分断面積は（ε を空間的に選んで）

$$d\sigma\, v_1=(2\pi/2E_1\,2M\,2E_2\,2M\,2\omega)|a+b|^2D$$

となる。ここで D は

$$D=[1/(2\pi)^6]E_2P_2\omega^2d\omega d\Omega d\Omega_\omega$$

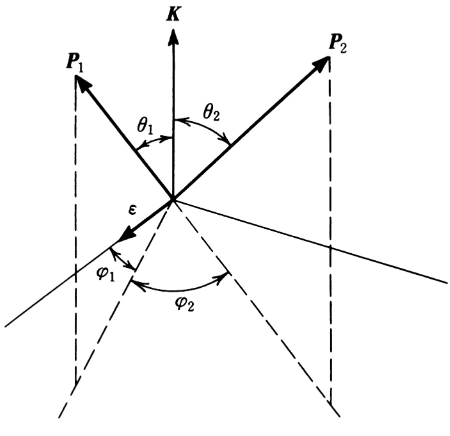
で，終状態密度である（第 16 章参照）。a, b, D の表示を $d\sigma$ に代入して，

$$d\sigma=\frac{4e^6}{(2\pi)^2}\frac{P_2}{P_1}\frac{\omega}{Q^4}\left| E_1\frac{(p_2\cdot\varepsilon)}{(p_2\cdot k)}-E_2\frac{(p_1\cdot\varepsilon)}{(p_1\cdot k)}\right|^2 d\omega d\Omega_2 d\Omega_\omega$$

を得る。全エネルギー・運動量の保存から

$$E_1=E_2+\omega$$

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{K}-\boldsymbol{Q}$$



〈図 20-3〉

が要請される（図 20-3 を参照）。放出光子の偏極について和をとると

$$d\sigma=[4e^6/(2\pi)^2](P_2/P_1)(1/Q^4)(d\omega/\omega)\,d\Omega_1 d\Omega$$

$$\times E_1^2\left[\frac{v_2\sin\theta_2}{1-v_2\cos\theta_2}\right]^2+E_2^2\left[\frac{v_1\sin\theta_1}{1-v_2\cos\theta_1}\right]^2$$

$$-\frac{2E_1E_2v_1v_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi}{(1-v_1\cos\theta_1)(1-v_2\cos\theta_2)}$$

を得る。これはスピン 1/2 粒子に対する有名なベーテ-ハイトラー公式に対応する，スピン 0 粒子の式である。

21

問題

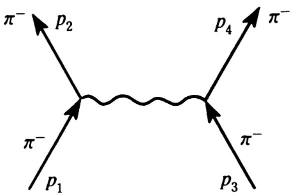
Problems

問題 21-1 c. m. 系（質量中心系）における $\pi^- $-$\pi^-$散乱。2 個のダイアグラムがあり，1 つは

$$\text{Amp.} = [(4\pi)^{1/2}e]^2(p_1+p_2)\cdot(p_3+p_4)(1/q^2)$$

$$p_1+p_3=p_2+p_4$$

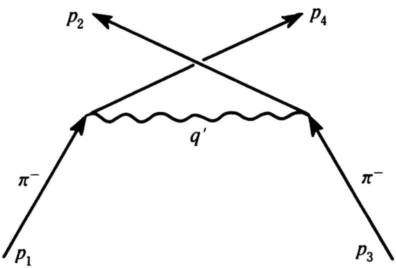
$$q=p_1-p_2$$



であり，もう一方は $p_2 \leftrightarrow p_4$ のように“交換”したダイアグラム

$$\text{Amp.} = [(4\pi)^{1/2}e]^2(p_1+p_4)\cdot(p_2+p_3)(1/q'^2)$$

$$q'=p_1-p_4$$



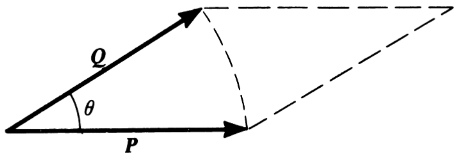
である。c. m. 系では $\boldsymbol{P}_1=-\boldsymbol{P}_3=\boldsymbol{P}$；$\boldsymbol{P}_2=-\boldsymbol{P}_4=\boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{Q}^2$

$$E_i=E=(\boldsymbol{P}^2+m^2)^{1/2}$$

である。すると

$$\frac{(p_1+p_2)\cdot(p_3+p_4)}{(p_1-p_2)^2}=\frac{4E^2+(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})^2}{(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q})^2}=\frac{E^2}{P^2}\frac{1+v^2\cos^2\theta/2}{\sin^2\theta/2}$$

となる。ただし，θ は図 21-1 のように $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ の間の角，$v=P/E$ である。



〈図 21-1〉

同様に，

$$\frac{(p_1+p_4)\cdot(p_2+p_3)}{(p_1-p_4)^2}=\frac{4E^2+(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q})^2}{(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})^2}=\frac{E^2}{P^2}\frac{1+v^2\sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2}$$

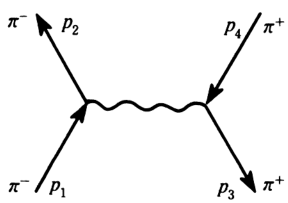
であり，2 つを加えると

$$M=4\pi e^2\frac{E^2}{P^2}\left[\frac{1+v^2\cos^2\theta/2}{\sin^2\theta/2}+\frac{1+v^2\sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2}\right]$$

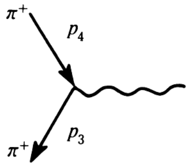
が得られる。

●

問題 21-2　π^+-π^-散乱（非常に興味のある場合）。1 つのダイアグラムがある（図 21-2）。第 5 章で述べたように，エネルギー-運動量 P の π^+（π^-の反粒子）は $p=-P$ の 4 元運動量で時間に逆行している π^-によって表せる。その過程に対する振幅は



〈図 21-2〉



$$(4\pi)^{1/2}e(p_3+p_4)\cdot\varepsilon=-(4\pi)^{1/2}e(P_3+P_4)\cdot\varepsilon$$

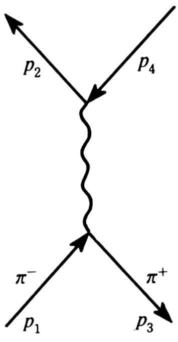
となるが，これは π^+が π^-の反対の電荷を持つことを表している。このことは，荷電粒子とその反粒子についていつでも成り立っている。したがって，この散乱過程に対する振幅は

$$\text{Amp.}=-[(4\pi)^{1/2}e]^2(p_1+p_2)\cdot(P_3+P_4)[1/(p_1-p_2)^2]$$

となる。

π^+は π^-と違うので，もちろん交換したダイアグラムはない。しかしながら，このダイアグラムに類似したものはある。p_1が p_2でなく p_3に，p_4が p_3でなく p_2に行くように結合の仕方を変えたダイアグラムを見てほしい。この振幅は

$$\text{Amp.}=[(4\pi)^{1/2}e]^2(p_1-P_3)\cdot(p_2-P_4)\times[1/(p_1+P_3)^2]$$



となり，ここでは π^+と π^-が消滅し，終状態で仮想光子が π^+-π^-対を再生している。

c. m. 系での散乱行列に対して

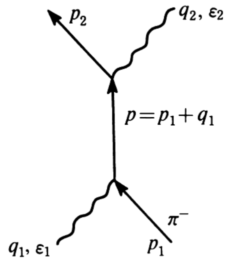
$$M=4\pi e^2\left[-\frac{E^2}{p^2}\frac{1+v^2\cos^2\theta/2}{\sin^2\theta/2}+\frac{p^2}{E^2}\cos^2\theta\right]$$

となることがわかる。

●

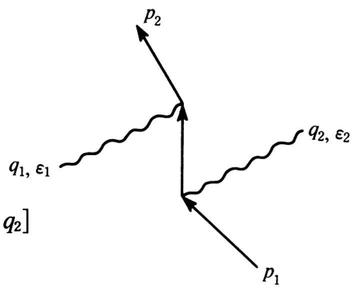
問題 21-3　π^-のコンプトン効果。$\gamma+\pi^-\to\pi^-+\gamma$ という過程を考える。これが起こりうるには3通りの方法がある：1つは

$$a=[(4\pi)^{1/2}e]^2(2p_2+q_2)\cdot\varepsilon_2 \times\{1/[(p_1+q_1)^2-m^2]\}(2p_1+q_1)\cdot\varepsilon_1 =4\pi e^2[(2p_2\cdot\varepsilon_2)(2p_1\cdot\varepsilon_1)/2p_1\cdot q_1]$$

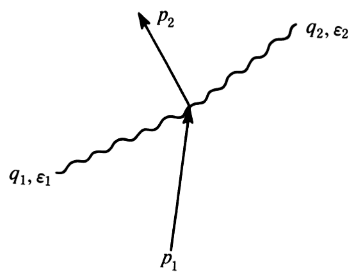


であるが，$q\cdot\varepsilon=0$ と $(q+p)^2-m^2=2p\cdot q$ を使った。残りの2つは

$$b=(4\pi)^{1/2}e(2p_2-q_1)\cdot\varepsilon_1 \times\{1/[(p_1-q_2)^2-m^2]\} \times(4\pi)^{1/2}e(2p_1-q_1)\cdot\varepsilon_2 =4\pi e^2[(2p_2\cdot\varepsilon_1)(2p_1\cdot\varepsilon_2)/2p_1\cdot q_2]$$



$$c=-4\pi e^2 2(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)$$

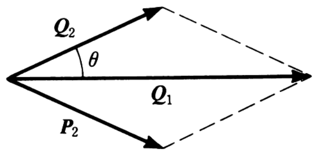


である。始状態のパイオンが静止している，つまり，$p_1=0$ の座標系で考えよう。$\varepsilon_4=0$ にとる。すると，

$$p_1\cdot\varepsilon_1=m\varepsilon_1=0 \qquad p_1\cdot\varepsilon_2=0$$

となるので，上記ダイアグラム c だけが寄与する。この結果は特別に選んだゲージ $\varepsilon_4=0$ のためである。ひとつひとつのダイアグラムの振幅はゲージ不変でないことに注意してほしい。いろいろな文献には，各ダイアグラムの相対的大きさについて多くのまちがった見解が述べられている。和だけがゲージ不変である。$\varepsilon'_\mu=\varepsilon_\mu+\alpha q_\mu$を代入しても断面積が変わらないことから，結果がゲージ不変であることを示せ。すなわち，$\varepsilon_1=\alpha_1 q_1$，あるいは $\varepsilon_2=\alpha_2 q_2$を代入しても 0 となる。

始状態のパイオンが静止している，つまり $P_1=0$ の座標系を考えよう。



光子は観測するがパイオン p_2は観測しない場合には，$p_2=p_1+q_1-q_2$を代入して，方程式から p_2を消去し，便利な公式が得られる。これを 2 乗すると $m^2=m^2+2p_1\cdot q_1-2p_2\cdot q_2-2q_1\cdot q_2$となるが，この座標系では

$$m(\omega_1-\omega_2)-\omega_1\omega_2(1-\cos\theta)=0$$

あるいは，

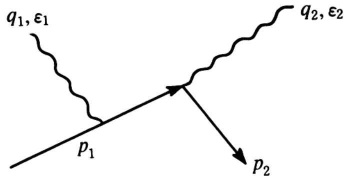
$$1/\omega_2=(1/\omega_1)+(1/m)(1-\cos\theta)$$

となり，これは静止している自由粒子によって散乱された光の振動数変化を表す，有名なコンプトンの公式である。

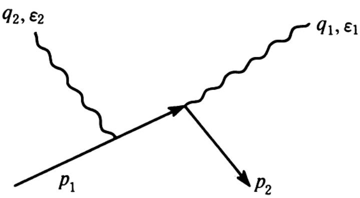
●

問題 21-4　π^+-π^-対消滅。これはコンプトン効果とまったく同様な過程だが，違いは π のうちの 1 個が時間に逆行しているだけである。

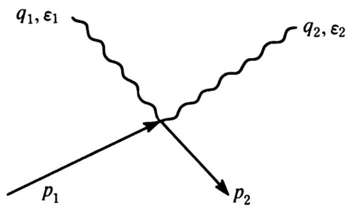
$$a=8\pi e^2[(p_2\cdot\varepsilon_2)(p_1\cdot\varepsilon_1)/p_1\cdot q_1]$$



$$b=8\pi e^2[(p_2\cdot\varepsilon_1)(p_1\cdot\varepsilon_2)/p_1\cdot q_2]$$

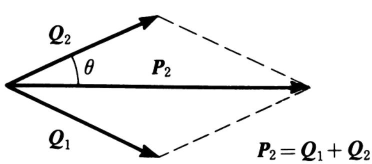


$$c=-8\pi e^2(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)$$



前と同じように，$\boldsymbol{P}_1=0$ の座標系を考えよう。$q_1=p_1-p_2-q_2$を 2 乗して $m+E_2=\omega_2(m+E_2-P_2\cos\theta)$ であることを示せ。すると，

$$M=-8\pi e^2(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)$$



$$v d\sigma=[e^4\omega_2^2/E_2(m+E_2)]|\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2|^2 d\Omega$$

となる。

全断面積は $1/v$ に比例し，$v\to 0$ で無限大になることがわかる。これは何を意味するのか？　単位体積当たり n 個の π からなる気体があるとしよう。この気体中を速度 v で運動している π^+が単位時間当たり消滅する確率は $1/\tau=n\sigma v$ であり，これは有限である。

π^+-π^-の束縛状態（ポジトロニウムのようなもの）では，n は原点における波動関数の 2 乗に等しくなり，τ はその系の寿命である。

22

スピン 1/2 の粒子

Spin-1/2 Particles

2 成分スピノールは，単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ のまわりに角 θ だけ空間回転すると，$\boldsymbol{M}=(1/2)\boldsymbol{\sigma}$ として，演算子 $\exp(-i\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M})$ で記述されるようにふるまったことを思い出してほしい。問題 5-1 で，このスピノールがローレンツ変換の下でどう変わるかと頭を悩ませたことであろう。空間回転の場合と同じように，無限小変換を考えれば充分である。対応する演算子を

$$1+i(\boldsymbol{v}/c)\cdot\boldsymbol{N}$$

と書こう。ここで $c=1$ とし，$\boldsymbol{v}$ は無限小の速度である。前と同じように進めると，z 方向の有限な速度 v では，$\tanh w=v/c$ として，演算子が $\exp(iwN_z)$ となる。

したがって，一般的なローレンツ変換を表すには，4 次元空間における 6 個の回転に対応して，

$$\boldsymbol{M}_x \quad \boldsymbol{M}_y \quad \boldsymbol{M}_z$$

$$\boldsymbol{N}_x \quad \boldsymbol{N}_y \quad \boldsymbol{N}_z$$

という 6 個の演算子が必要になる。これらは反対称テンソルを構成し，その成分は

$$M_{\mu\nu}=-M_{\nu\mu}=\begin{pmatrix} M_{yz} & M_{zx} & M_{xy} \\ M_{xt} & M_{yt} & M_{zt} \end{pmatrix} \qquad \text{ここで } M_x=M_{yz} \text{ など}$$

である。(ローレンツ変換を連続して行なって)代数的に，あるいは絵を描いて

$$M_xM_y-M_yM_x=iM_z$$

$$N_xM_y-M_yN_x=iN_z$$

$$N_xN_y-N_yN_x=-iM_z \qquad \text{およびサイクリックな置き換え}$$

という交換関係が見つかる。他は

$$N_z M_z - M_z N_z = 0$$

のようにすべて交換する。これらを全部まとめると，

$$M_{\mu\nu} M_{\sigma\tau} - M_{\sigma\tau} M_{\mu\nu} = i\left(\delta_{\nu\sigma} M_{\mu\tau} - \delta_{\nu\tau} M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} M_{\nu\tau} + \delta_{\mu\tau} M_{\nu\sigma}\right)$$

となる。

さて，2 成分スピノール u に作用する演算子 N の表現を求めよう。まず最初に N は 2×2 の行列

$$N_x = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

でなければならない。$\boldsymbol{M} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}$ と交換関係を使って，未知数に対する方程式を作り，解をひねり出すこともできよう。しかしながら，任意の 2×2 の行列は 4 個の行列，$\mathbf{1}$，σ_x，σ_y，σ_z の 1 次結合で表せる。そこで，

$$N_x = \alpha\mathbf{1} + a\sigma_x + g\sigma_y + h\sigma_z$$

と書くことができる。N_x と σ_x とは交換することに注意しよう。したがって，$g = h = 0$ なので，

$$N_x = \alpha\mathbf{1} + a\sigma_x$$

$$N_y = \beta\mathbf{1} + b\sigma_y$$

$$N_z = \gamma\mathbf{1} + c\sigma_z$$

となる。交換関係に入れると，

$$N_x M_y - M_y N_x = iN_z$$

$$(\alpha\mathbf{1} + a\sigma_x)(1/2)\sigma_y - (1/2)\sigma_y(\alpha\mathbf{1} + a\sigma_x) = i(\gamma\mathbf{1} + c\sigma_z)$$

$$ia\sigma_z = i(\gamma\mathbf{1} + c\sigma_z)$$

となる。したがって，

$$a = c$$

$$\gamma = 0$$

となる。サイクリックに置き換えて，

$$b = a \qquad \alpha = \beta = 0$$

となる。

したがって，

$$\boldsymbol{N}=a\,\boldsymbol{\sigma}$$

である。

a を決めるには，$N_xN_y-N_yN_x=-iM_z$ に $\boldsymbol{N}=a\boldsymbol{\sigma}$を代入すると，

$$a^2=-1/4 \qquad a=\pm i/2$$

となる。a の符号は両方選べる。＋を選ぶとしよう。すると，

$$\boldsymbol{N}=i\boldsymbol{\sigma}/2 \qquad \boldsymbol{M}=\boldsymbol{\sigma}/2$$

となる。ここで，鏡映したスピノールの性質を考えよう。$\boldsymbol{v}\to-\boldsymbol{v}$ で，$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}$ はスカラーだから，$\boldsymbol{N}\to-\boldsymbol{N}$ となり，また $\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{M}$ である。したがって，2 成分スピノールとその鏡映したスピノールはローレンツ変換のもとで同じようには変換しない。鏡映不変にするためには 4 成分スピノールを必要とするのである。

$\sigma_v=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$と書くと，ローレンツ変換のもとで u を変換する演算子は

$$\exp(-\sigma_v w/2)$$

となる。

たとえば，平面波状態 $u\exp(-ip\cdot x)$ を考えよう。z 軸に沿ってのローレンツ変換に対しては，$\sigma_v=\sigma_z$，$u'=\exp(-\sigma_z w/2)\,u$ である。$u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$を変換して一般的な場合が作れる。

$$u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad u'=\exp(-w/2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad =\exp(w/2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{N}$ はエルミートではないので，u^*u はスカラーではない。u^*u の変換を考えよう：

$$u^{*\prime}u'=u^*\exp(-\sigma_z w/2)\exp(-\sigma_z w/2)\,u=u^*\exp(-\sigma_z w)\,u$$

ここで，

$$\exp(-\sigma_z w)=1-\sigma_z w+(w^2/2!)-\sigma_z(w^3/3!)+\cdots$$

$$=[1+(w^2/2!)+(w^4/4!)+\cdots]-\sigma_z[w+(w^3/3!)+\cdots]$$

$$\exp(-\sigma_z w)=\cosh w-\sigma_z\sinh w$$

となる。したがって，

$$u'^* u' = \cosh w(u^* u) - \sinh w(u^* \sigma_z u)$$

であり，また同様に，

$$u'^* \sigma_z u' = \cosh w(u^* \sigma_z u) - \sinh w(u^* u)$$

となる。

ここで直ちに，ローレンツ変換のもとで，$u^* u$ と $u^* \sigma_z u$ はまさに t，z のように変換することに気がつく：

$$\left.\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vz) \\ z' &= \gamma(z - vt) \end{aligned}\right\} \qquad \gamma = (1 - v^2)^{1/2}$$

$u^* u$ と $u^* \boldsymbol{\sigma} u$ とで4元ベクトルになると結論づける前に，$x' = x$，$y' = y$ と同じようなことが成立することをチェックしなければならない：

$$\begin{aligned} u'^* \sigma_x u' &= u^* \exp(-\sigma_z w/2)\, \sigma_x \exp(-\sigma_z w/2)\, u \\ &= u^* \exp(-\sigma_z w/2) \exp(+\sigma_z w/2)\, \sigma_x u \\ &= u^* \sigma_x u \end{aligned}$$

この結果，新しい4元ベクトルであることがわかり，これを S_μと書こう：

$$S_\mu = u^* \sigma_\mu u$$

$$\sigma_\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma})$$

ここで，S_μは確率流であるための条件を満足しているように思えるかもしれない。前にやったように，$u^* u = 2E$ と規格化しよう。

すると，

$$u^* \sigma_\mu u = 2p_\mu \qquad S_\mu = 2p_\mu$$

となる。

z 方向にスピン上向きの粒子があるとしよう：

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u^* u = 1 \qquad u^* \sigma_z u = 1 \qquad u^* \sigma_x u = u^* \sigma_y u = 0$$

確率流が $u^* \sigma_z u$ のように，常に z 方向に突出しているので，これは困ったことである。したがって，この確率流では静止粒子を表せないということになる。

この特別な場合には，$(u^* u)^2 = (u^* \boldsymbol{\sigma} u)^2$となることに注意する。これは回転について不変であり，任意のスピノールはある方向，それを z とすると，

z 方向にスピンを持つ粒子を表すので，このことは一般的に正しい。つまり，常に

$$S_\mu S_\mu = 0$$

であり，$S_\mu = 2p_\mu$とすると，

$$p_\mu p_\mu = 0 \qquad \text{そしてまた} \qquad m = 0$$

でなければならない。

このため，いま行なったことは0質量（でスピン1/2）の粒子にのみ成り立つことである。そのような粒子は1個だけ知っている——ニュートリノである。一般的に $S_\mu \sigma_\mu u = 0$ を示せる。（最初に，

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の場合を考え，これが任意の u について成立することを示せ。）$S_\mu = 2p_\mu$とすると，

$$p_\mu \sigma_\mu u = 0$$

あるいは

$$(E - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\, u = 0$$

となる。

これがニュートリノを記述する規則と考えよう。すべての運動量の平面波について成り立つので，c_p を運動量の任意関数として，平面波の任意結合も

$$\int (E - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\, c_{\boldsymbol{p}}\, u_{\boldsymbol{p}} \exp(-ip \cdot x) [d^3\boldsymbol{p}/(2\pi)^3] = 0$$

を満たす。これは座標空間の方程式にも変換できる。

この方程式は簡単に

$$\int i\nabla_\mu \sigma_\mu [c_{\boldsymbol{p}}\, u_{\boldsymbol{p}} \exp(-ip \cdot x)][d^3\boldsymbol{p}/(2\pi)^3] = 0$$

あるいは

$$\varphi(x) = \int c_{\boldsymbol{p}}\, u_{\boldsymbol{p}} \exp(-ip \cdot x) [d^3\boldsymbol{p}/(2\pi)^3]$$

として

$$i\nabla_\mu \sigma_\mu \varphi(x) = 0$$

となる。完全に書き表せば，一般的な方程式は

$$[(\partial/\partial t) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla] \varphi(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

となる。

$\sigma_p = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$を定義する。$p=E$ だから，方程式 $(E-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u=0$ は

$$\sigma_p u = u$$

と等しくなる。

これは，粒子が常に進行方向に対し時計回りにスピンしていることを意味する。実験から，実際にはニュートリノが反時計回りであることを知っている。しかし，$\boldsymbol{N}$ の符号について別の可能性のあることを思い出してほしい。

$\boldsymbol{N} = -i\boldsymbol{\sigma}/2$ に対して，4元ベクトルのように変換するものは

$$S'_\mu \equiv (u^* u, -u^* \boldsymbol{\sigma} u)$$

であることがわかる。

この場合には，方程式

$$(E+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})v=0$$

を得る。v によって記述される粒子は

$$\sigma_p v = -v$$

と，反時計回りにスピンしている。

u と v は別々に変換することに注意することが大切である：

$$u' = \exp(-\sigma_v w/2)u \qquad v' = \exp(+\sigma_v w/2)v$$

u と v はそれぞれ，共変スピノール，反変スピノールといわれる。これに対応する変換はそれぞれ，共変的，反変的であるといわれる。

23
有限質量への拡張

Extension of Finite Mass

第 22 章で $S_\mu=(u^*\sigma_\mu u)$ は 4 元ベクトルのように変換することがわかった。これは，B_μを任意として

$$B_\mu(u^*\sigma_\mu u)$$

が不変であることを意味する。

これから，

$$B_\mu\sigma_\mu u$$

がローレンツ変換のもとで u とは違うようにふるまうことがわかる。

$u'^*=u^*\exp(-\sigma_v w/2)$ だから，

$$(B_\mu\sigma_\mu u)'=\exp(+\sigma_v w/2)(B_\mu\sigma_\mu u)$$

となる。

したがって $B_\mu\sigma_\mu u$（u は共変スピノール）は反変スピノールのように変換し，v が反変スピノールなら，$B_\mu\sigma_\mu v$ は共変スピノールとなる。

有限質量への拡張

質量 0 でスピン 1/2 の粒子の方程式は

$$(E-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u=0 \qquad \text{右回り}$$

$$(E+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})v=0 \qquad \text{左回り}$$

であることがわかった。

$\boldsymbol{p}$ が極性ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$が軸性ベクトルなので，これらの方程式は空間反転に関して不変的でないことに注意しよう。(数年前まではこのことが，25 年前にパウリが “Handbuch der Physik” の 226 ページで行なったように，これらの方程式を落としてしまってもよい充分な理由であったが，とにかくいまでは

パリティは破れており，いままでにここで得た結果を大切にしよう。)

最初の方程式を

$$p_\mu \sigma_\mu u = 0$$

と書くと，左辺は反変量であることがわかる。したがって，粒子の相互作用や質量など，何らかの項を加えるときには，同じ変換性を持つべきであるということに注意しなければならない。たとえば，mu は u が共変スピノールなので，正しくなかろう。

この結果，ソースとして簡単で望ましい形は（u に 1 次で）

$$A_\mu \sigma_\mu u$$

となる。

たとえば，最近わかった β 崩壊の相互作用は

$$(u_1^* \sigma_\mu u_2)(u_3^* \sigma_\mu u_4)$$

であり，結合はこの形をしている。μ 崩壊では，u_1はニュートリノ，u_2はミューオン，u_3は電子，u_4は反ニュートリノを表す。u_1の運動方程式の中での項を得るには，u_1^*について変分する。$u_3^* \sigma_\mu u_4$がベクトル（A_μ）であることに注意すれば，仮定した形の $A_\mu \sigma_\mu u_2$が得られていることがわかる。

ここで再び質量を考えよう。方程式

$$(E^2 - \boldsymbol{p}^2)\, u = m^2 u$$

は変換に対して正しくふるまうが，u は 2 成分を持っているので，この方程式はスピン 0 の 2 個の独立な粒子を記述している。本当の困難は，電磁相互作用が含まれるときに現れる。そのとき，上記の方程式は

$$[(E - e\varphi)^2 - (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2]\, u = m^2 u$$

となる。

スピン 1/2 の粒子に特徴的な $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{H}$ という項が，この方程式からは出てこない。

さらに，相互作用のないときには

$$(E + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})(E - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\, u = m^2 u$$

と

$$(E^2 - \boldsymbol{p}^2)\, u = m^2 u$$

の間の区別がないことに注意しよう。しかしながら，相互作用のあるときに

は，代入すれば

$$E \longrightarrow E-e\varphi \qquad \boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}$$

となるので，2 つの方程式で異なる結果が得られる。

u が共変的なのに注意しよう。このとき，u は $(E-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ によって反変的に，そして再び $(E+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ によって共変的になる。そこで，

$$(E-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,u = mv \tag{23-1}$$

によって，反変的なスピノール v を導入しよう。すると，

$$(E+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,v = mu \tag{23-2}$$

となる。

結合したこれらの方程式は正しく変換する。そして $m=0$ のときには，以前の結果を与える（ただし，もはや結合はしていない）。いっしょになると，

$$(E+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})(E-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,u = m^2u \tag{23-3}$$

という方程式に等しい。

(23-1) と (23-2) は 4 成分スピノール

$$\Psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

を導入すれば 1 つにまとめられる。行列

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

を定義しよう。Ψ に γ_t を作用させると，u が v に変わる：

$$\gamma_t\Psi = \gamma_t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

同様に

$$\boldsymbol{\gamma}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} v \\ \boldsymbol{\sigma} u \end{pmatrix}$$

となる。したがって，(23-1) と (23-2) は

$$m\Psi=(E\gamma_t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma})\Psi$$

あるいは

$$m\Psi=p_\mu\gamma_\mu\Psi \tag{23-4}$$

のようにまとめられる。(23-4) [あるいは (23-1) と (23-2)] はディラック方程式として知られている。質量を持ち，正しい変換性を持つ。γ_μは 4 元ベクトルのようにふるまうと考えられる。

[ディラック方程式は

$$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha}+m\beta)\Psi=E\Psi$$

の形に書かれることも多い。これは関係式

$$\gamma_t=\beta \qquad \boldsymbol{\alpha}=\gamma_t\boldsymbol{\gamma}$$

を使えば，(23-4) に等しい。]

γ 行列の性質を知っていると役に立つ。容易に

$$\gamma_t^2=1 \qquad \gamma_x^2=-1$$

$$\gamma_t\gamma_x+\gamma_x\gamma_t=0$$

であることがわかる。完全な規則は

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu} \tag{23-5}$$

である。

多くの問題で，γ の表現そのものは使わないですみ，交換関係 (23-5) からあらゆることが導ける。

カレント

u と v の状態を混合させれば，静止している粒子も表わせる確率流を作ることができる。次の量

$$(u^*u,\ u^*\boldsymbol{\sigma}u) \qquad (v^*v,\ -v^*\boldsymbol{\sigma}v)$$

が 4 元ベクトルであることを思い出そう。

静止系でスピン上向きの粒子があるとしよう：

$$u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=v, \qquad \boldsymbol{p}=0, \qquad mv=Eu$$

$$(u^*u,\ u^*\boldsymbol{\sigma}u)=(1,\ 0,\ 0,\ +1)$$

$$(v^* v, -v^* \boldsymbol{\sigma} v) = (1,\ 0,\ 0, -1)$$

上の2つのベクトルの和をとって新しい4元ベクトルを定義すると，空間部分が消せることに注意しよう：

$$S_\mu = (u^* u + v^* v,\ \ u^* \boldsymbol{\sigma} u - v^* \boldsymbol{\sigma} v)$$

この新しいカレントには，その空間成分が静止系で0という典型的性質がある。さらに，ΨでS_μを書けばもっと簡単になる。容易にわかるように，Ψ^*をΨのエルミート共役として，

$$S_\mu = (\Psi^* \Psi,\ \ \Psi^* \gamma_t \boldsymbol{\gamma} \Psi)$$

となる。もっと都合の良い形にするために，

$$\overline{\Psi} \equiv \Psi^* \gamma_t$$

を定義しよう。すると，$S_\mu = (\overline{\Psi} \gamma_t \Psi,\ \ \overline{\Psi} \boldsymbol{\gamma} \Psi)$ は

$$S_\mu = \overline{\Psi} \gamma_\mu \Psi \tag{23-6}$$

の形をとる。(23-6) が連続の方程式

$$\nabla_\mu S_\mu = 0 \tag{23-7}$$

を満たしていることは容易にわかる。なぜならば，ディラック方程式とその共役

$$i \nabla_\mu \gamma_\mu \Psi - m \Psi = 0$$

$$i \nabla_\mu \overline{\Psi} \gamma_\mu + m \overline{\Psi} = 0$$

を考えよう。これらの方程式に，順に$\overline{\Psi}$を左から，Ψを右からかけて加えると，

$$i \overline{\Psi} (\nabla_\mu \gamma_\mu \Psi) + i (\nabla_\mu \overline{\Psi} \gamma_\mu) \Psi = 0$$

を得るが，これは (23-7) である。

しかしながら，u, あるいはvだけでは保存カレントは作れない。たとえば，$\nabla_\mu (u^* \sigma_\mu u) = (2m) \mathrm{Im} (u^* v) \neq 0$ である。[これは u に対する (23-1) 式から出てくる。]

最後に，(23-1) と (23-2) は変換

$$u \longrightarrow v \qquad\qquad \boldsymbol{p} \longrightarrow -\boldsymbol{p}$$

によって互いに入れ替わることに注意しよう。S_μはこの変換によって変わらない。したがってこれらの方程式は鏡映変換のもとで不変である（しかし，β結合の項は不変でない)。

作用原理

ディラック方程式（23-4）［したがって，(23-1) と (23-2)］は，作用

$$S=\int(\overline{\Psi}p_\mu\gamma_\mu\Psi-m\overline{\Psi}\Psi)\,d^4\tau$$

から導けよう。(a_μを4元ベクトルとして）便利な表記法

$$\not{a}\equiv a_\mu\gamma_\mu$$

を導入すると，電磁場中におけるスピン1/2粒子の作用は

$$S'=\int[\,\overline{\Psi}\,(\not{p}-e\not{A})\,\Psi-m\overline{\Psi}\Psi+(1/4)\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}]\,d^4\tau$$

と書ける。S'を$\overline{\Psi}$について変分すると，粒子に対する運動方程式

$$(\not{p}-m)\,\Psi=e\not{A}\Psi$$

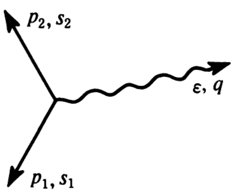
を得る。

この方程式から，スピン1/2粒子に対する伝搬関数が $1/(\not{p}-m)$ であることがわかるだろう。$(\not{p}-m)(\not{p}+m)=p^2-m^2$だから，計算するときには，

$$1/(\not{p}-m)=(\not{p}+m)/(p^2-m^2)$$

という関係式を用いることが多い。ラグランジアンの中の $e\overline{\Psi}\not{A}\Psi$という結合項から，スピノールと光子相互作用の基本的な振幅

$$\text{Amp.}=(4\pi)^{1/2}e\,U_{s_2}(p_2)\,\not{\varepsilon}\,U_{s_1}(p_1)$$



が得られる。

24

4成分スピノールの性質

Properties of the Four-Component Spinor

ここで4成分スピノール

$$U=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

の性質を考えよう。ただし U はディラック方程式

$$\not{p}U=mU$$

あるいは，2成分の形で，

$$(E-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u=mv$$

$$(E+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})v=mu$$

を満たしているとする。

まず最初に，この方程式には独立な解が2つだけしかない。したがって，スピン1/2粒子を表している。U はどのように変換するであろうか？ z 軸に沿ったローレンツ変換では

$$u'=\exp(-\sigma_z w/2)u \qquad v'=\exp(+\sigma_z w/2)v$$

となることを知った。したがって，

$$U'=\begin{pmatrix} \exp(-\sigma_z w/2)u \\ \exp(+\sigma_z w/2)v \end{pmatrix}=\left[\cosh(w/2)-\sinh(w/2)\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix}\right]U$$

となる。

以前導入した4×4行列

$$\gamma_t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

を使えば，もっとまとまった形でこの変換を書ける。

$$\gamma_t\gamma_z=\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix}$$

だから,

$$U' = \exp(-\gamma_t \gamma_z w/2)\, U$$

そして

$$N_z = (i/2)\, \gamma_t \gamma_z$$

となる。この変換は, t-z 平面での回転だから, x-y 平面での回転は同様にして $M_z = (i/2)\, \gamma_x \gamma_y$であると期待される。チェックしてみよう。$\gamma$ 行列に対する表示を代入すると,

$$M_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

となるので,

$$U' = \exp(\gamma_x \gamma_y \theta/2)\, U = \begin{pmatrix} \exp(-i\sigma_z \theta/2)\, u \\ \exp(-i\sigma_z \theta/2)\, v \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

スピン状態を記述する問題に戻ろう。もし粒子が静止していたなら, ディラック方程式はまさに

$$m\gamma_t U = mU$$

となる。したがって,

$$u = v$$

となる。このことから, 2 つの解だけしかないことがわかり, それはある軸に沿って, スピン上向き, 下向きととれる。たとえば, z 軸に沿ってスピン上向きに対しては

$$\sigma_z u = u \qquad \sigma_z v = v$$

あるいは

$$\sigma_z U = U$$

となる。

しかしながら, もし粒子が運動していれば, (u と v はローレンツ変換のもとで違うように変換するので) $u \neq v$ となる。運動粒子のスピンの方向を記述する際は, もっと慎重にしなければならない。運動方向に沿って$\boldsymbol{\sigma}$をとれば, スピン上向き (右へリシティ), あるいは下向き (左へリシティ)

$$\not{p} U_{\pm} = mU_{\pm} \qquad \sigma_p U_{\pm} = \pm U_{\pm}$$

のように解を記述できる。しかし，運動方向に沿っての$\boldsymbol{\sigma}$はローレンツ不変な概念ではない。（$\boldsymbol{\sigma}$と $\boldsymbol{p}$ は可換ではないので）$\boldsymbol{\sigma}$が任意の方向では，ディラック方程式の解で，かつ，$\boldsymbol{\sigma}$の固有関数でもあるようなものは見つけられない。他の方法でスピン状態が記述できるものを探してみよう。静止系に戻ると，

$$\gamma_t U = U \qquad \sigma_z U = i\gamma_x\gamma_y U = U$$

である。だから，

$$\sigma_z\gamma_t U = U$$

とも書ける。ここでローレンツ不変な行列

$$\gamma_5 = -\gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z$$

を導入し，

$$\sigma_z\gamma_t = i\gamma_x\gamma_y\gamma_t = -i\gamma_z\gamma_5$$

と書こう。そしてまた，W を $W_\mu p_\mu = 0$，$W_\mu W_\mu = -1$ を満たす 4 元ベクトルとしよう。静止系では $W_t = 0$ で，$\boldsymbol{W}$ は任意方向の単位ベクトルである。特に $\boldsymbol{W}$ が z 軸に沿っているなら，$\sigma_z\gamma_t = i\not{W}\gamma_5$となる。したがって，$U$ は $i\not{W}\gamma_5 U = U$ を満足する。

静止系から出発したが，この方程式はローレンツ不変，つまり任意の座標系で成立する。したがって，運動粒子に対しては$(W\cdot p)=0$，$W^2=-1$ として，2 つのスピン状態は $i\not{W}\gamma_5$の固有状態である。物理的にはこれらの解は，その粒子の静止系でのある軸に沿って，スピン上向きと下向きを表している。

問題を解くときには，一般的に振幅は $m = \bar{U}_2 M U_1$の形をしている。ただし，M は γ 行列の 1 次結合，U_1と U_2は順に，初期，終期スピン状態である。

確率は

$$\begin{aligned} m^* m &= (\bar{U}_2 M U_1)^* (\bar{U}_2 M U_1) \\ &= (\bar{U}_1 \bar{M} U_2)(\bar{U}_2 M U_1) \end{aligned}$$

に比例するが，これを計算してみよう。ただし，$\bar{M}$はすべての γ を逆の順にし，i があれば$-i$ に変えた M である。［$\bar{U} = U^*\gamma_t$という定義から，$M = \gamma_t(\gamma_t M)^*$となることがわかる。ここで $*$ はエルミート共役を意味する。$\bar{M}$をこう決めても不変性は明らかでない。上に与えたほうがずっと簡単である。読者自身のために，これらが一致することをチェックせよ。たとえば，

$$\bar{\gamma}_x = \gamma_x$$

$$\overline{i\gamma_x\gamma_y} = -i\gamma_y\gamma_x$$

であり，また

$$\bar{\gamma}_5 = \gamma_5$$

となるが，これは非常に便利である。]これを計算するには2通りの方法がある。最初は，明らかなやり方である。U_1と U_2に対する1対の方程式

$$\not{p}U = mU$$

$$i\not{W}\gamma_5 U = U$$

を解いて，

$$m = (\overline{U}_2 M U_1)$$

を計算する。

もっと良い方法で，普通，実用にしているのは，以下のようなトリックを使うものである。終状態のスピンには関心がないとしよう。そのとき，求めたいのは

$$\sum_{\overline{U}_2\text{の2スピン状態}} (\overline{U}_1 M U_2)\cdots$$

である。これは

$$(\overline{U}_1 M X M U_1)$$

の形に書ける。ただし，$X = \sum_{2\text{スピン}} U_2\overline{U}_2$は4×4行列である（$U$ と$\overline{U}$が“逆の”順序であることに注意)。粒子が静止している $p = m\gamma_t$の座標系をとろう。解は（$\overline{U}U$ を $2m$ に規格化し，添え字2を落として）

$$\text{スピン上向き} = (m)^{1/2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{スピン下向き} = (m)^{1/2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

となる。すると，

$$U_{\text{up}}\overline{U}_{\text{up}} = m\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad U_{\text{down}}\overline{U}_{\text{down}} = m\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

そして

$$X=m\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}=m(\gamma_t+1)$$

あるいは，不変的な形で $X=\not{p}+m$ となるが，これはあらゆる座標系で成立する。

ついでに言えば，これを別の方法で理解するには，行列のかけ算の法則によって，

$$\sum_{U\text{ の 4 状態全部}}(\bar{U}_1AU)(\bar{U}BU_1)=2m(\bar{U}_1ABU_1)$$

となることに気がつくことである。U の 4 個の状態は，$\not{p}U=mU$ と $\not{p}$の固有値 $+m$ に属する 2 個だけでなく，$\not{p}U'=-mU'$ と別の固有値 $-m$ に属する 2 個の状態もある。しかし，$A=\bar{M}(\not{p}+m)$ と書けば，欲しくない状態に対しては $AU'=0$ のようにゼロとなるが，欲しい状態に対しては $AU=\bar{M}U2m$ となる。したがって，

$$\sum_{2\text{ 状態}}(\bar{U}_1\bar{M}\ \ U_2)(\bar{U}_2MU_1)=\sum_{4\text{ 状態}}[\bar{U}_1\bar{M}[(\not{p}_2+m)/2m]U_2\}(\bar{U}_2MU_1)$$
$$=[\bar{U}_1M(\not{p}_2+m)MU_1]$$

となる。

これに加えて，もし入射状態が偏極していないならば，2個のスピノール U_1 について和をとらねばならない。ここで

$$\sum_{4\text{ 状態}}(\bar{U}_iAU_i)=2m\ \mathrm{Trace}A$$

という事実を使えば，

$$\sum_{\text{スピン 1}}\sum_{\text{スピン 2}}(\bar{U}_1\bar{M}U_2)(\bar{U}_2MU_1)=\mathrm{Trace}[\bar{M}(\not{p}_2+m)M(\not{p}_1+m)]$$

となることがわかる。あとで，スピン状態について興味がある場合にはどうすればよいかを議論しよう。

ここで，問題はすべて γ 行列の 1 次結合のトレースを計算することに帰着された。これらのトレースをどう計算するか？　（以前与えた行列 γ_t，γ_x，… の対角成分の和を調べれば）次の関係式

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_t=0$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_x=0$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_y=0$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_z=0$$

が成立することに注意しよう。任意の2個の行列 A, B に対して

$$\mathrm{Tr}\,AB=\mathrm{Tr}\,BA$$

$$\mathrm{Tr}(\alpha A+\beta B)=\alpha\mathrm{Tr}A+\beta\mathrm{Tr}B \qquad \alpha,\ \beta：複素数$$

が成立する。この規則を使えば,

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_x\gamma_y=\mathrm{Tr}\,\gamma_y\gamma_x$$

となるが,

$$\gamma_x\gamma_y=-\gamma_y\gamma_x$$

であるから,

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_x\gamma_y=0$$

となることがわかる。1個のトレースだけがゼロでない——つまり, 単位行列のトレースで, $\mathrm{Tr}\,\mathbf{1}=4$ である。

このため恐ろしいほど簡単になる。γ 行列の複雑な積のトレースを計算するには, 単位行列の成分を探すだけでよい。(2×2 行列はどんなものでも3個のパウリ・スピノール $\boldsymbol{\sigma}$ と単位行列で書き表せるのと同じように, γ 行列の積で独立なものは16個あり, 任意の4×4行列は, それらの1次結合に帰着される。)

奇数個の γ 行列の積のトレースは, どんなものでも0となる。偶数個の γ 行列の積を簡単にするには次のようにすればよい：

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b})=\mathrm{Tr}(\not{b}\not{a})=(1/2)\,\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a})$$
$$=4(a\cdot b)$$

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=-\mathrm{Tr}(\not{b}\not{a}\not{c}\not{d})+2(a\cdot b)\,\mathrm{Tr}(\not{c}\not{d})$$

$$\mathrm{Tr}(\not{b}\not{a}\not{c}\not{d})=-\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{a}\not{d})+2(a\cdot c)\,\mathrm{Tr}(\not{b}\not{d})$$

$$\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{a}\not{d})=-\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{d}\not{a})+2(a\cdot d)\,\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c})$$

ここで,

$$\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{d}\not{a})=\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})$$

なので,

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=4[(a\cdot b)(c\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)]$$

となる。このアイデアは, 恒等式

$$\not{a}\not{b}=-\not{b}\not{a}+2(a\cdot b)$$

を使って，最初の γ 行列 $\not{a}$ を順々に右へ持っていくことである。$\not{a}$ が右の端に達すると，出発点のトレースに戻るが，奇数回置換しているので反対符号になっている。そして，残されたトレースは2個だけ減った γ の積となるが，単位行列となるまでこの手続きをくり返せばよい。

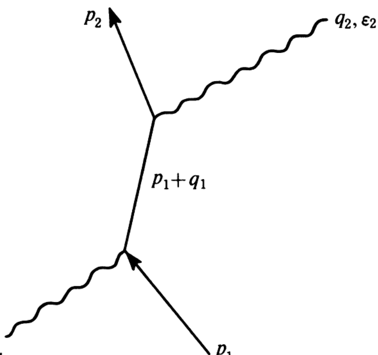
25

コンプトン効果

The Compton Effect

トレースの計算法に慣れるため，自由電子による光子の散乱であるコンプトン効果を詳しく計算してみよう。この過程には2個のダイアグラムが寄与する：

$$\text{Amp.} = \overline{U}_2(4\pi)^{1/2}e\not{\varepsilon}_2 \times[1/(\not{p}_1+\not{q}_1-m)] \times(4\pi)^{1/2}e\not{\varepsilon}_1 U_1$$



複素偏極 ε_1，ε_2に対しては，出て行く波は（外向き波動関数のように）ε_2^*で結合する。順に左から右へ，入射光子を吸収する振幅$(4\pi)^{1/2}e\not{\varepsilon}_1$，$1/(\not{p}_1+\not{q}_1-m)$＝仮想電子の伝搬関数，終状態に光子を放出する振幅$(4\pi)^{1/2}e\not{\varepsilon}_2$である。各バーテックスでエネルギー・運動量は保存される。全振幅は電子の初期状態と終期状態間の成分である。吸収と放出の順番を入れ換えたダイアグラムを加え合わせて，$m=4\pi e^2\overline{U}_2MU_1$となる。ここで

$$M=\not{\varepsilon}_2\frac{1}{\not{p}_1+\not{q}_1-m}\not{\varepsilon}_1+\not{\varepsilon}_1\frac{1}{\not{p}_1-\not{q}_2-m}\not{\varepsilon}_2$$

である。これで物理は終わりであり，残りは単なる代数計算である。まず，分母を

$$\frac{1}{\not{p}-m}=\frac{1}{\not{p}-m}\frac{\not{p}+m}{\not{p}+m}=\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}$$

と有理化しよう。また，

$$(p_1+q_1)^2-m^2=p_1^2+2p_1\cdot q_1+q_1^2-m^2=2p_1\cdot q_1$$
$$(p_1-q_2)^2-m^2=-2p_1\cdot q_2$$

なので，

$$M=\not{\varepsilon}_2\frac{(\not{p}_1+\not{q}_1+m)\not{\varepsilon}_1}{2p_1\cdot q_1}-\not{\varepsilon}_1\frac{(\not{p}_1-\not{q}_2+m)\not{\varepsilon}_2}{2p_1\cdot q_2}$$

となる。M は$\overline{U}_2$と U_1の間でとられることに注意し，

$$\not{p}_1 U_1=mU_1$$

であるから，$\not{p}_1$を右側へ移動すると，もっと簡単になる。したがって，

$$\not{p}_1\not{\varepsilon}_1=-\not{\varepsilon}_1\not{p}_1+2p_1\cdot\varepsilon_1$$
$$\not{p}_2\not{\varepsilon}_2=-\not{\varepsilon}_2\not{p}_1+2p_1\cdot\varepsilon_2$$
$$M=[\not{\varepsilon}_2\not{q}_1\not{\varepsilon}_1+2\not{\varepsilon}_2(p_1\cdot\varepsilon_1)]/(2p_1\cdot q_1)$$
$$+[\not{\varepsilon}_1\not{q}_2\not{\varepsilon}_2-2\not{\varepsilon}_1(p_1\cdot\varepsilon_2)]/(2p_1\cdot q_2)$$

となることに注意する。最後に，初期状態の電子が静止している座標系を選べば，

$$p_1\cdot q_1=m\omega_1$$
$$p_1\cdot q_2=m\omega_2$$

となり，ε_1，ε_2は空間的だから，

$$p_1\cdot\varepsilon_1=p_1\cdot\varepsilon_2=0$$

そして，

$$M=(1/2m)[(\not{\varepsilon}_2\not{q}_1\not{\varepsilon}_1/\omega_1)+(\not{\varepsilon}_1\not{q}_2\not{\varepsilon}_2/\omega_2)]$$

となる。散乱断面積を計算するには

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{スピン1}}\sum_{\text{スピン2}}(\overline{U}_1\overline{M}U_2)(\overline{U}_2MU_1)$$
$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{Trace}\,[\overline{M}(\not{p}_2+m)M(\not{p}_1+m)]$$

を計算する必要がある（第 24 章を参照）。

$$A=\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_2+m)\not{\varepsilon}_2^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_1(\not{p}_1+m)]$$
$$B=\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_2+m)\not{\varepsilon}_1\not{q}_2\not{\varepsilon}_2^*(\not{p}_1+m)]$$
$$C=\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_2\not{q}_2\not{\varepsilon}_1^*(\not{p}_2+m)\not{\varepsilon}_2^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_1(\not{p}_1+m)]$$
$$D=\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_2\not{q}_2\not{\varepsilon}_1^*(\not{p}_2+m)\not{\varepsilon}_1\not{q}_2\not{\varepsilon}_2^*(\not{p}_1+m)]$$

としよう。すると，

$$1/2\mathrm{Tr}[\bar{M}(\not{p}_2+m)M(\not{p}_1+m)]$$
$$=(1/8m^2)[(1/\omega_1^2)A+(1/\omega_1\omega_2)(B+C)+(1/\omega_2^2)D]$$

となる。A を考えよう。$\not{\varepsilon}_1\not{\varepsilon}_1{}^*=-1$ だから，2 個の$\not{\varepsilon}_1$をいっしょにしよう。また，$\not{p}_1\not{\varepsilon}_1=-\not{\varepsilon}_1\not{p}_1$に注意する。

$$A=\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_2+m)\not{\varepsilon}_2^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_1(\not{p}_1+m)]$$
$$=\mathrm{Tr}[\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_2+m)\not{\varepsilon}_2^*\not{q}_1(\not{p}_1-m)]$$
$$=2(p_2\cdot\varepsilon_2^*)\mathrm{Tr}[\not{q}_1\not{\varepsilon}_2\not{q}_1(\not{p}_1-m)]+\mathrm{Tr}[\not{q}_1(\not{p}_2-m)\not{q}_1(\not{p}_1-m)]$$

ここで，

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}\not{b}=4a\cdot b$$
$$\mathrm{Tr}\ \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}=4[(a\cdot b)(c\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)]$$

を使うと，

$$A=8[2(p_2\cdot\varepsilon_2^*)(q_1\cdot\varepsilon_2)+(q_1\cdot p_2)](q_1\cdot p_1)$$

を得る。$\varepsilon_1\longleftrightarrow\varepsilon_2^*$，$q_1\longleftrightarrow q_2$ のように入れ換えると，

$$D=8[2(p_2\cdot\varepsilon_1)(q_2\cdot\varepsilon_1^*)+(q_2\cdot p_2)](q_2\cdot p_1)$$

を得る。$p_1=(m,\ \mathbf{0})$ では

$$p_2\cdot\varepsilon_2=q_1\cdot\varepsilon_2 \qquad p_2\cdot\varepsilon_1=-q_2\cdot\varepsilon_1$$
$$q_1\cdot p_2=m\omega_2 \qquad q_2\cdot p_2=m\omega_1$$

となるので，

$$A=8m\omega_1[2|(q_1\cdot\varepsilon_2)|^2+m\omega_2]$$
$$D=8m\omega_2[-2|(q_2\cdot\varepsilon_1)|^2+m\omega_1]$$

を得る。

次に B を考えよう。$\not{\varepsilon}_1$を右へ動かすことから始めると，

$$B=\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_2+m)\not{\varepsilon}_1\not{q}_2\not{\varepsilon}_2^*(\not{p}_1+m)]$$
$$=2(\varepsilon_1\cdot q_2)\{\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_2+m)\not{\varepsilon}_2^*(\not{p}_1+m)]=\alpha\}$$
$$-2(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2^*)\{\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_2+m)\not{q}_2(\not{p}_1+m)]=\beta\}$$

$$+\{\mathrm{Tr}[\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_2+m)\not{q}_2\not{\varepsilon}_2^*(\not{p}_1-m)]=\gamma\}$$

となる。α と γ では$\not{\varepsilon}_2$を右へ，β では$\not{p}_2=\not{p}_1+\not{q}_1-\not{q}_2$を代入すると，

$$\alpha=2(p_2\cdot\varepsilon_2^*)\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_1+m)]-\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1(\not{p}_2-m)(\not{p}_1+m)]$$

$$\beta=\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_1+m)\not{q}_2(\not{p}_1+m)]+\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2\not{q}_1\not{q}_2(\not{p}_1+m)]$$

$$=2(p_1\cdot q_2)\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{\varepsilon}_2(\not{p}_1+m)]+2(q_1\cdot\varepsilon_2)\mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}_1^*\not{q}_1\not{q}_2(\not{p}_1+m)]$$

$$\gamma=2(p_2\cdot\varepsilon_2)\mathrm{Tr}[\not{q}_1\not{q}_2\not{\varepsilon}_2^*(\not{p}_1-m)]-\mathrm{Tr}[\not{q}_1(\not{p}_2-m)\not{q}_2(\not{p}_1-m)]$$

が得られる。トレースを計算すれば，

$$\alpha=4\{2(\varepsilon_2^*\cdot p_2)[-(\varepsilon_1^*\cdot\varepsilon_2)(q_1\cdot p_1)+(\varepsilon_1^*\cdot p_1)(q_1\cdot\varepsilon_2)]-(\varepsilon_1^*\cdot p_2)$$
$$\times(q_1\cdot p_1)+(\varepsilon_1^*\cdot p_1)(q_1\cdot p_2)\}$$
$$=4\{2(\varepsilon_2^*\cdot q_1)[-(\varepsilon_1^*\cdot\varepsilon_2)]+(\varepsilon_1^*\cdot q_2)\}m\omega_1$$

$$\beta=4\{2(p_1\cdot q_2)[-(\varepsilon_1^*\cdot\varepsilon_2)(q_1\cdot p_1)+(\varepsilon_1^*\cdot p_1)(q_1\cdot\varepsilon_2)]$$
$$+2(q_1\cdot\varepsilon_2)[-(\varepsilon_1^*\cdot q_2)(q_1\cdot p_1)+(\varepsilon_1^*\cdot p_1)(q_1\cdot q_2)]\}$$
$$=4\{2m\omega_2(-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2^*)+2(q_1\cdot\varepsilon_2)[-(\varepsilon_1^*\cdot q_2)]\}m\omega_1$$

$$\gamma=4\{2(p_2\cdot\varepsilon_2)[(q_1\cdot q_2)(\varepsilon_2^*\cdot p_1)-(q_1\cdot\varepsilon_2^*)(q_2\cdot p_1)]-(q_1\cdot p_2)(q_2\cdot p_1)$$
$$+(q_1\cdot q_2)(p_2\cdot p_1)-(q_1\cdot p_1)(p_2\cdot q_2)-m^2(q_1\cdot q_2)\}$$
$$=4\{2(q_1\cdot\varepsilon_2^*)(-q_1\cdot\varepsilon_2)\omega_2m-(q_1\cdot p_2)\omega_2m+(q_1\cdot q_2)(p_1\cdot p_2)$$
$$-\omega_1m(p_2\cdot q_2)-m^2q_1\cdot q_2\}$$
$$=4\{2(q_1\cdot\varepsilon_2^*)(-q_1\cdot\varepsilon_2)\omega_2m-(\omega_1^2+\omega_2^2)m+(q_1\cdot q_2)(p_1\cdot p_2-m^2)\}$$

を得る。最後の項は

$$(q_1\cdot q_2)=(1/2)(q_1-q_2)^2=-(1/2)(p_1-p_2)^2+p_1\cdot p_2-m^2$$
$$=m(\omega_1-\omega_2)$$

を代入すると，

$$\gamma=4\{2(q_1\cdot\varepsilon_2^*)(-q_1\cdot\varepsilon_2)\omega_2-2\omega_1\omega_2\}m$$

のように簡単になる。最後にまとめると，

$$B=8\{|\varepsilon_1\cdot q_2|^2m\omega-|q_1\cdot\varepsilon_2|^2m\omega_2+m\omega_1m\omega_2[2|\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2^*|^2-1]$$
$$+[2(\varepsilon_1^*\cdot\varepsilon_2)(\varepsilon_2^*\cdot q_1)(\varepsilon_1\cdot q_2)-2(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2^*)(\varepsilon_2\cdot q_1)(\varepsilon_1^*\cdot q_2)]m\omega_1\}$$

となる。C について同様な計算をすれば，$B^*=C$ となる(したがって，B の中の最後の 2 項は $B+C$ の和の中では消し合う)。この結果は，B の最終的な表現の中でただ単に $\varepsilon_1\longleftrightarrow\varepsilon_2$，$q_1\longleftrightarrow q_2$と置き換えても得られない。それは，この結果は特別な，つまり $p_1=(m,\mathbf{0})$ という座標系で得たものだからである。

(B の場合のすべての因子を逆にすることによって求められる。) 結果をすべて集めると,

$$1/2\mathrm{Tr}[\overline{M}(\not{p}_2+m)M(\not{p}_1+m)]$$
$$=(1/m^2)[(m/\omega_1)(2|q_1\cdot\varepsilon_2|^2+m\omega_2)+(m/\omega_2)(-2|q_2\cdot\varepsilon_1|^2+m\omega_1)]$$
$$+(2/\omega_1\omega_2)[|\varepsilon_1\cdot q_2|^2 m\omega_1-|q_1\cdot\varepsilon_2|^2 m\omega_2+m\omega_1 m\omega_2$$
$$\times(2|\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2|^2-1)]$$
$$=[(\omega_1/\omega_2)+(\omega_2/\omega_1)-2+4|(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2^*)(\varepsilon_1^*\cdot\varepsilon_2)|]$$

が得られる。散乱断面積は

$$d\sigma=[(4\pi)^2e^4/2^4m\omega_1E_2\omega_2][(\omega_1/\omega_2)+(\omega_2/\omega_1)-2+4|\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2^*|^2]$$
$$\times 2\pi D$$

によって与えられる(第 16 章参照)。ここで, D は単位領域当たりの終状態密度であり,

$$D=E_2\omega_2^3 d\Omega/(2\pi)^3 m\omega_1 \qquad E_2=m+\omega_1-\omega_2$$
$$1/\omega_2=(1/\omega_1)+(1/m)(1-\cos\theta)$$

と書ける。θ は入射光子と散乱光子のなす角である。$d\sigma$ に代入すると, 最終的に

$$d\sigma/d\Omega=(r_0^2/4)(\omega_2/\omega_1)^2[(\omega_1/\omega_2)+(\omega_2/\omega_1)-2+4|\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2^*|^2]$$
$$r_0=e^2/m$$

を得る。非相対論的極限($\omega_1\ll m$)では $\omega_1\simeq\omega_2$ となり, 断面積は

$$d\sigma/d\Omega=r_0^2(\omega_2/\omega_1)^2|\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2^*|^2$$

とスカラー粒子のものに帰着するが, 超相対論的極限($\omega_1\gg m$)では $\omega_2\simeq m\ll\omega_1$($\theta=0$ は除く)で,

$$d\sigma/d\Omega=(r_0^2/4)(\omega_2/\omega_1)$$

となる。このことは物理的には, 非相対論的極限では主として電荷によって相互作用が起こるのに対し, 超相対論的極限では電子の磁気能率によって相互作用が起こることを意味している。

26

ミューオンによる直接的対生成

Direct Pair Production by Muons

別の例として，質量 M，スピン 0，電荷 Ze の非常に重い原子核にミューオンが衝突して直接電子対を生成する過程を考えよう。実験室では図 26-1 に示したような過程である。直接的対生成に寄与する重要な過程は図 26-2(a) と (b) に示されている。実際の陽電子の運動量は $-q_1$ であることに注意する。保存則から，

$$k_1 = P_1 - P_2$$

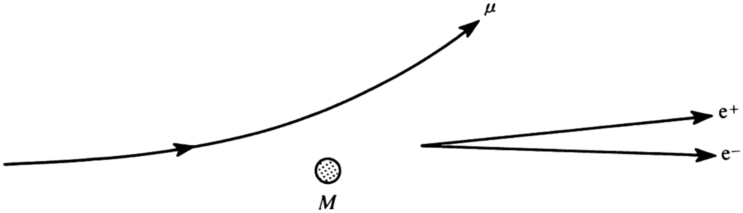
$$k_2 = p_1 - p_2$$

$$q_1 + p_1 + P_1 = q_2 + P_2 + p_2$$

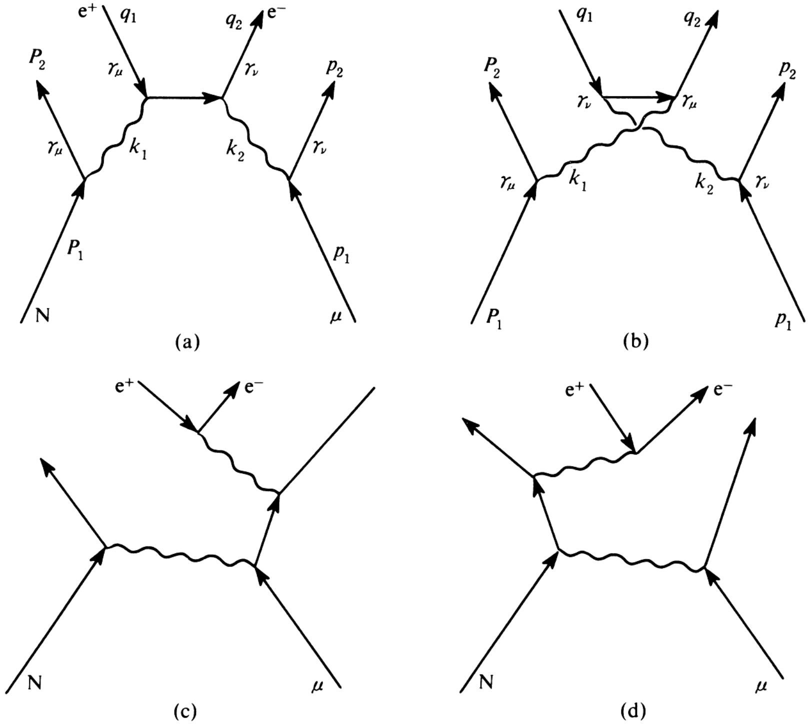
となる。直接的対生成は別の 2 つの方法でも起こる。しかし，図 26-2(c) と (d) はこの場合無視できる。ダイアグラム (c) と (d) が無視できる本質的な理由は，重い粒子は光子を放出するのがむずかしいということである。電子による直接的対生成にはこの議論は適用できず，ダイアグラム (c) が重要になる。

ダイアグラム (a) に対する振幅は

$$4\pi e^2 Z\{\overline{U}(q_2)\gamma_\nu[1/(\not{q}_1 + \not{k}_1 - m)]\gamma_\mu U(q_1)\}(1/k_1^2)(1/k_2^2) \times[\overline{U}(p_2)\gamma_\nu U(p_1)](P_{1\mu} + P_{2\mu})$$



〈図 26-1〉



〈図 26-2〉

となる。この結果を導くとき，各粒子の世界線に沿って因子をかけた。$U(p_1)$, $U(p_2)$はミューオンの状態を表し，$U(q_1)$，$U(q_2)$ は電子の状態を表す。m は電子質量である。

ダイアグラム(b)に対応する振幅は多少異なり，

$$4\pi e^2 Z\{\overline{U}(q_2)\,\gamma_\mu[1/(\not{q}_1+\not{k}_2-m)]\gamma_\nu U(q_1)\}(1/k_1^2)\,(1/k_2^2)$$
$$\times[\,\overline{U}(p_2)\,\gamma_\nu U\,(p_1)\,](P_{1\mu}+P_{2\mu})$$

である。ここで M が非常に大きければ

$$P_{1\mu}=P_{2\mu}=M\delta_{\mu 4}$$

となる。これは核の反跳を無視した近似に相当する。ここで，反跳を無視するのは核との間にクーロン相互作用だけを取り入れたことに等しいことを示

そう。核は最初，静止しているとしよう。$P_1=P_2+k_1$だから，

$$2P_2\cdot k_1+k_1^2=0$$

あるいは

$$2M\omega_1+\omega_1^2-\boldsymbol{K}_1^2=0$$

であり，したがって，

$$\omega_1\simeq \boldsymbol{K}_1^2/2M=0$$

となる。それゆえに

$$1/k_1^2\simeq -1/\boldsymbol{K}_1^2$$

となるが，最後の形はまさに運動量空間でのクーロン・ポテンシャルである。取り巻いている電子群による核電荷の遮蔽効果は，たとえば$1/\boldsymbol{K}_1^2$を有効ポテンシャルのフーリエ変換で置き換えることによって取り入れられる。例として，$V(r)=(Ze^2/r)\exp(-\alpha r)$ ならば，適切な形は

$$1/(\boldsymbol{K}_1^2+\alpha^2)$$

である。

核のスピンは0と仮定した[光子を放出する振幅は$(4\pi)^{1/2}Ze(P_1+P_2)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$]。核がスピン1/2を持つとしよう。そのとき，光子を放出する振幅は $(4\pi)^{1/2}Ze\,\overline{U}(P_2)\not{\varepsilon}\,U(P_1)$ である。そして，

$$\overline{U}(P_2)\,\gamma_\mu U(P_1)=(1/2M)\,\overline{U}(P_2)\,(\not{P}_2\gamma_\mu+\gamma_\mu\not{P}_1)\,U(P_1)$$

なので，$k_1=P_1-P_2$を代入すると，

$$\overline{U}(P_2)\,\gamma_\mu U(P_1)=(1/2M)\,(P_{1\mu}+P_{2\mu})\,\overline{U}(P_2)\,U(P_1)$$
$$-(1/2M)\,\overline{U}(P_2)\,(\not{k}_1\gamma_\mu-\gamma_\mu\not{k}_1)\,U(P_1)$$

を得る。第1項は電荷からの寄与である。$M\to\infty$の極限では$\overline{U}(P_2)\,U(P_1)=2M$（スピン・フリップなし）であり，スピン0の場合と同じ結果を得る。第2項は磁気能率の寄与である。反跳運動量に比例し，この場合無視できる。

27

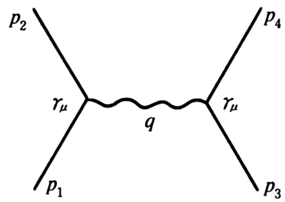
高次項過程

Higher-Order Processes

2 電子の散乱を考えよう。最低次の項はダイアグラム

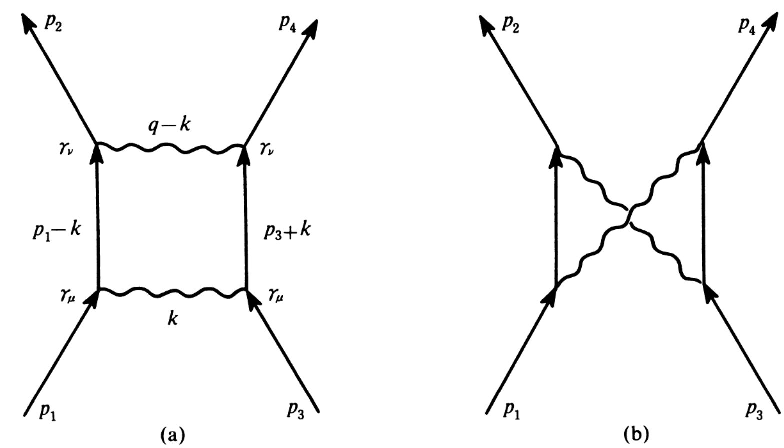
$$\text{Amp.} = [(4\pi)^{1/2} e]^2 (\overline{U}_4 \gamma_\mu U_3)(\overline{U}_2 \gamma_\mu U_1) \times (1/q^2)$$

$$q = p_2 - p_1$$



と，これを“交換した”ダイアグラムに対応する。

ここで，もう少し正確な解を知りたいとしよう。そのときには図 27-1 の 2 つのダイアグラムを考える必要がある。ダイアグラム（a）の振幅は



〈図 27-1〉

$$[(4\pi)^{1/2}e]^4\int\{\bar{U}_4\gamma_\nu[1/(\not{p}_3+\not{k}-m)]\gamma_\mu U_3\}\{\bar{U}_2\gamma_\nu[1/(\not{p}_1-\not{k}-m)]\gamma_\mu \bar{U}_1\}$$
$$\times(1/k^2)[1/(q-k)^2][d^4k/(2\pi)^4]$$

である。

中間状態の光子の運動量に関して，振幅は可能なすべての値について積分していることに注意しよう。因子 $1/k^2$，$1/(q-k)^2$ は光子の伝搬関数に対応する。波かっこの中の表記法は，各外線につけられた矢印に従って，行列要素を右から左に書いていくことに対応する。各外線はそれぞれ独立にたどる。したがって，因子 $\{\bar{U}_2\gamma_\nu[1/(\not{p}_1-\not{k}-m)]\gamma_\mu U_1\}$ は状態 U_1 にある粒子が，偏極 μ（因子 γ_μ），運動量 k の光子を放出し，$1/(\not{p}_1-\not{k}-m)$ で伝搬してから，別の仮想光子（γ_ν）と相互作用し，状態 U_2 に散乱されるということを意味している。

この積分は計算できる。大きな k で $\int(k^3dk/k^6)$ のようにふるまうので，収束する。しかしながら，小さな k では少し困難があるが，物理的にうまく説明できる。図 27-1 のダイアグラムでは暗黙のうちに了解されているように，光子が放出されないときの振幅を求めているが，その場合，これは正しい疑問ではない。実際は，低エネルギー光子の放出なしで，2 個の電子を散乱させることはできない。そうでなくて，輻射エネルギーが $\Delta\varepsilon$ 以上にならないような確率を求めなければならない。これは，まったく光子が放出されない確率，プラス，$E_1<\Delta\varepsilon$ の 1 個の光子の確率，プラス，2 個合わせて $E_2<\Delta\varepsilon$ の光子の確率，……などの合計した確率に等しい。最初の 2 つの確率は，別々に計算すれば e^6 のオーダーで発散するが，振幅を加えて求めた確率は e^6 のオーダーで有限な結果が得られる。

たとえば，小さなωでは光子放出振幅は $\int(d\omega/\omega)$ のようにふるまう。積分下限を x で切断し，ダイアグラム（a）と（b）も同様にすれば，結果から x は消え去り，したがって $x\to 0$ の極限がとれよう。しかしながら，直接この方法を使うと，相対論的に不変性を保つのが容易でなく，それゆえトラブルのもとになる。

そうでなく，光子が非常に小さな質量 λ（質量は不変）を持つとしよう。したがって，光子の伝搬関数の k^2 を $k^2-\lambda^2$ で置き換える。すると，(a)＋(b)

のダイアグラムの振幅には $\ln(m/\lambda)$ という項が含まれる。

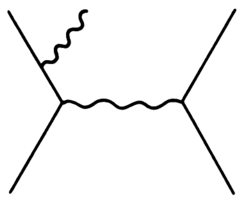
ここで，(a)＋(b)のダイアグラムの最低次の確率を考えよう。交差項は e^6 に比例する。

したがって，光子のない確率は $e^4+e^6 a\ln(m/\lambda)$ に比例する。ここで，a は正のある数である。

次に，図 27-2 のダイアグラム（確率で e^6）を考えよう。$E<\Delta\varepsilon$ の 1 個の光子の確率は

$$-e^6 a\ln(\Delta\varepsilon/\lambda)$$

となることがわかる。$\Delta\varepsilon$ 以外の因子は同一である。



〈図 27-2〉

したがって，加え合わせると λ は e^6のオーダーで消える。そのような発散は(赤外カタストロフィーといわれるが)，問題が正しく設定されていれば消え去るのである。この問題に対する最初の解はブロッホ-ノルドジィーク(Bloch and Nordosiek）によって見つけられた。

$\lambda\to 0$ で $e^2\ln(m/\lambda)\to\infty$なので，摂動論が成立しないのではと反対するかも知れない。しかし，実用上充分使える余地がある。修正が小さくなくなるのはどの程度の λ なのかを調べてみよう。そのときは，

$$e^2\ln(m/\lambda)\ll 1$$

が要請されるが，これは

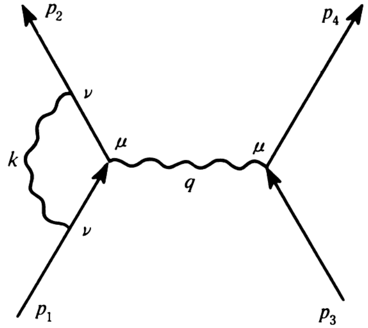
$$\lambda/m\ll \mathrm{e}^{-137}\approx 10^{-60}$$

$$\lambda\ll 10^{-60}\mathrm{m}$$

となる。

ここで，いわゆる赤外カタストロフィーは，実際上まったくカタストロフィーではないことがわかった。

次に，まったく新しい型のダイアグラムに移ろう。電子によって放出された光子が同一の電子に吸収される。そのような過程の例を図 27-3 に示す。



〈図 27-3〉

この振幅は

$$[(4\pi)^{1/2}e]^4\int(\overline{U}_4\gamma_\mu U_3)\{\overline{U}_2\gamma_\nu[1/(\not{p}_2-\not{k}-m)]\gamma_\mu$$
$$\times[1/(\not{p}_1-\not{k}-m)]\gamma_\nu U_1\}(1/q^2)(1/k^2)[d^4k/(2\pi)^4]$$

である。

ここで病的なこと——困難が現れる。大きな k に対し，この積分は

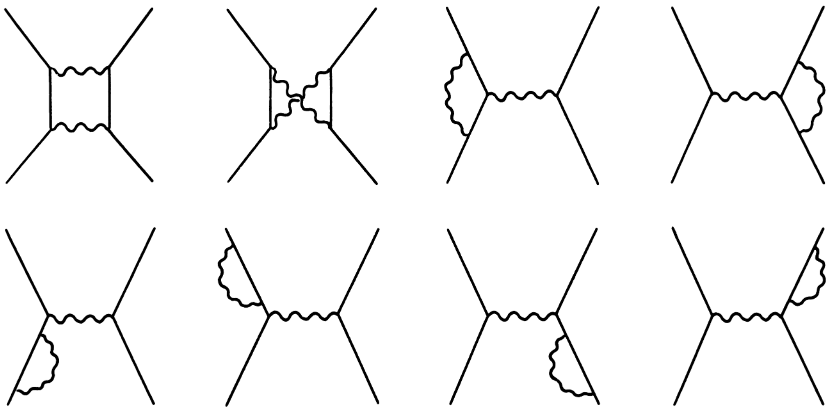
$$\int k^3dk/k^4$$

のようになり，**あらゆる** k について厳密に積分しなければならず，大きな k では対数的に発散する。

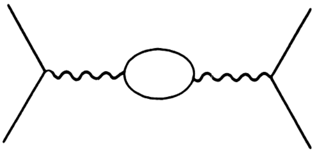
これは，赤外と区別するために，紫外カタストロフィーと呼ばれる。前の場合とは違って，本当のカタストロフィーである。解決できないのである。しかし，ゴミを絨毯の下に掃き込んでしまう方法はある：まず，4 次のダイアグラムをすべて描き出す(図 27-4)。もう 1 つあるが，それは真空偏極として知られている別の病的なものである（図 27-5)。

これらの問題を攻める前に，簡単な場合を考えよう。2 次で図 27-6 のようなダイアグラムがあるが，電子が仮想的に光子を放出してそれを吸収することに対応する。

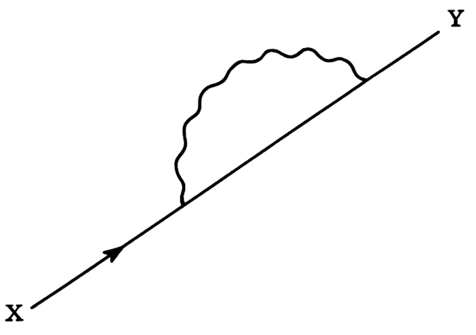
ここでは何も自由になるものはない。X から Y へ行く電子については，**自由電子の**伝搬関数の極は $p^2=m^2$ にある。しかしながら，X と Y で測定して



〈図 27-4〉



〈図 27-5〉



〈図 27-6〉

も，電子がいかほどの光子を放出し，吸収したかは答えられない。最も簡単なものは図 27-6 に示したが，そのような過程によって極の位置は移動する。物理的には，測定しているもの（“実験的”質量，m_{exp}）は“裸”の質量でなく，上に述べた仮想過程の効果を何がしか含んだものなのである。数学的に実験的質量を定義するには，上記仮想過程を考慮したときの伝搬関数の極の位置とすればよい。この議論は，“裸”の質量(ここで m_0 と呼ぼう)は実際上，直接は観測できないことを示している。この事実を利用して，電気力学では発散の困難を閉じ込める工夫ができる(しかし，解決ではない)。このやり方は人類の工夫した任意の理論に効果があるわけではない。たとえば，擬ベクトル中間子論には適用できない。

28

電子の自己エネルギー

Self-Energy of the Electron

電子の自己エネルギーは古くからの問題であり，すでに古典物理学の中に現れている。電子が球殻上に全電荷がある半径 a の球だとすると，全静電エネルギーは $E_0 = e^2/2a$ となる。おそらく電子の質量 m はこのエネルギーに対応する。しかしながら，電子が速度 V で運動しているときに，この場によって運ばれる運動量 P を計算すると(球のローレンツ短縮を含めて), $P = (4/3)E_0 V/(1-V^2)^{1/2}$となる。これは質量 $m = (2/3)(e^2/a)$ の粒子に対応する。ポアンカレは，何かが球としてまとまらせているのに違いなく，その力が蓄えられているエネルギーの総量を増やしているのではないかと言った。しかし，この力についての信頼すべき理論はない。

この自己エネルギーは，電荷を“集めておく”のに必要なエネルギーから出てくる。1 つの見方は，電子の電荷のある一部分と別の部分との相互作用エネルギーであるとする。1 つの抜け道として最初に考えられそうなのは，電子の自己相互作用を否定する，つまり電子は互いに別の電子とのみ相互作用するというものである(そのときは電子は点電荷となる)。しかし，実際にある輻射抵抗という現象を説明するために，電子の自己相互作用は必要なのである。電荷が加速されると，輻射し，エネルギーを失うので，加速力が加えられねばならない。何に抗してなのか？　古典物理学に従えば，電荷のある一部分と別の部分との相互作用で生じた力に対してなのである。

荷電球のある一部分の電磁場が別の部分に及ぼす相互作用によって，運動している荷電球に働く力 F を計算できる。この力は

$$F = (2/3)(e^2/a)\ddot{\chi} + (2/3)(e^2/c^3)\dddot{\chi} + \mathrm{O}(a)$$

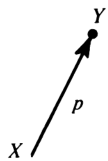
である。第 1 項は場の運動量から計算した質量と一致する。第 2 項は電子が

放出した輻射による反作用力であり，a によらない。しかしながら，$a\to 0$ とすると矛盾する。また，いままでに広がった電荷を完全に分析したものはない。内部運動などの問題が生じよう。現実には，これらの問題は古典的にいろいろな方法で解かれているが，量子力学ではどの１つも成功裏に行なわれたものはない（R. P. Feynman[10]を参照）。

質量のくり込み

ここで，この問題の量子力学版の質量のくり込みを議論しよう。電子が２つのバーテックス X と Y の間を伝搬する振幅を考えよう。最低次のダイアグラムは

$$\text{Amp.}=Y\frac{1}{\not p-m}X$$



である。また，X から Y に移動する間に，電子が仮想光子を放出し，吸収することも可能である。

$$\begin{aligned}\text{Amp.}&=Y4\pi e^2\int\frac{1}{\not p-m}\gamma_\mu\frac{1}{\not p-\not k-m}\gamma_\mu\frac{1}{k^2}\frac{1}{\not p-m}\\&\quad\times\frac{d^4k}{(2\pi)^4}X\\&=Y\frac{1}{\not p-m}C\frac{1}{\not p-m}X\end{aligned}$$



ここで，

$$C=4\pi e^2\int\gamma_\mu\frac{1}{\not p-\not k-m}\gamma_\mu\frac{1}{k^2}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

C は不変的な形で，$C=A(p^2)\not p+B(p^2)$ と書ける。この物理的意味は何か？ C が小さいとしよう。そうすると，最初の２項は

$$Y\frac{1}{\not p-m}X+Y\frac{1}{\not p-m}C\frac{1}{\not p-m}X=Y\frac{1}{\not p-m-C}X$$

と書ける。これは

$$\frac{1}{\not p-m-C}=\frac{1}{\not p-m}+\frac{1}{\not p-m}C\frac{1}{\not p-m}+\frac{1}{\not p-m}C\frac{1}{\not p-m}C\frac{1}{\not p-m}+\cdots$$

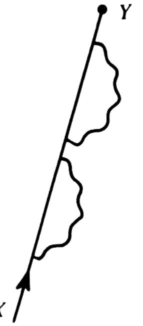
(任意の 2 個の演算子 A, B に対する一般的な関係式

$$\frac{1}{A-B}=\frac{1}{A}+\frac{1}{A}B\frac{1}{A}+\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A}+\cdots$$

の特別な場合)

を使えばよい。もし, C が単なる数ならば, それは質量に対する修正と考えられる。この級数の第 1 項, 第 2 項は順に仮想光子 0, 1 個の電子伝搬の振幅である。第 3 項が 2 個の光子による寄与

$$\text{Amp.}=Y\frac{1}{\not p-m}C\frac{1}{\not p-m}C\frac{1}{\not p-m}X$$



であり, 第 4 項が 3 個の, ……であることは容易に示せる。しかしながら, これらのダイアグラムは, いつでも 1 個だけの光子しかない過程のみを含む。たとえば 2 個の仮想光子では, 図 28-1 に示すように 2 つの方法がある。少しの間だけ, これらのダイアグラムは忘れよう。これらのダイアグラムは, X と Y の間の電子伝搬の全振幅を

$$\frac{1}{\not p-m-C}=\frac{1}{\not p-m-A\not p-B}$$

と書いたとき, e^4のオーダーで C に寄与する。ここで, A と B は p^2の関数で



〈図 28-1〉

ある。この伝搬関数の極が自由粒子のエネルギー・運動量の関係式を，したがって実験的に観測される質量 m_{exp} を与える。

$$\frac{1}{(1-A)\not{p}-(m+B)}=\frac{(1-A)\not{p}+(m+B)}{(1-A)^2p^2-(m+B)^2}$$

と有理化して，極は

$$[1-A(p^2)]^2p^2-[m+B(p^2)]^2=0$$

の解であることがわかる。ついでながら，たまたま1個以上の極があれば，これは別の粒子（おそらくはミューオン†）と解釈できよう。$A\ll 1$，$B\ll m$ とすると，$A(p^2)=A(m^2)$，$B(p^2)=B(m^2)$ とおける。すると，

$$p^2=\left[\frac{m+B(m^2)}{1-A(m^2)}\right]^2=m_{\text{exp}}^2$$

あるいは

$$m_{\text{exp}}=(m+B)/(1-A)=m+\delta m$$

となる。ただし，

$$\delta m=B(m^2)+mA(m^2)$$

である。

したがって，伝搬関数は $\not{p}=m_{\text{exp}}$ に極を持ち，m_{exp}^2 の近くの p^2 では，ある定数（極の留数）かける（$\not{p}-m_{\text{exp}})^{-1}$ のようになる。$p^2=m_{\text{exp}}^2$ の留数を $1+r$ と書く。伝搬関数は

$$(1+\mathrm{r})/(\not{p}-m_{\text{exp}})$$

の形に書き直せる[r は A，B と $p^2=m_{\text{exp}}^2$ で計算したそれらの微分，$A'(p^2)$，$B'(p^2)$ で表せる]。普通の形（$\not{p}-m_{\text{exp}})^{-1}$ とは違っているが，これは光子の結合の強さが修正されていると解釈される[11]［というのは，もし光子との結合が（$1+r)^{1/2}$ だけ変わっているといえば，伝搬関数に（$1+r$）という因子が出てくるからである］。次は，もちろん，関数 A，B を計算することである。このためには

$$\int\gamma_\mu\frac{\not{p}-\not{k}+m}{p^2-2p\cdot k+k^2-m^2}\,\gamma_\mu\frac{d^4k}{k^2}$$

という積分を計算する必要がある。関係式

†〔訳注〕電子がミューオンに変化することは，実験的に高い精度で禁止されている。もしあれば電子の励起状態かもしれないが，これも実験的には見つけられていない。

$$\gamma_\mu\gamma_\mu = 4$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma_\mu = -2\not{a}$$

を使えば，γ_μが消せる。δm では，$p^2 = m^2$とおくべきである。すると

$$\int \frac{-2(\not{p} - \not{k}) + 4m}{-2p \cdot k + k^2} \frac{d^4k}{k^2}$$

を得るが，この積分は発散する。k が大きなところでの値を調べよう。そこでは最初の分母は k^2で近似できる。k を含む項は対称性から 0 となろう。k が大きなところで，被積分関数は k^3dk/k^4に比例し，したがって，積分は対数発散する。量子電気力学は完全な失敗に終わってしまった！

ベーテ（H. A. Bethe）は，この無限大が電気力学に限って存在するということに気がついた(のちほど議論する別の 1 つの例を除いて)。仮に，積分が収束する規則があるとしよう。たとえば，伝搬関数 $1/k^2$は常に相対論的に不変な収束因子 $C(k^2)$ がかけられると仮定する。

それを

$$C(k^2) = -[\lambda^2/(k^2 - \lambda^2)]$$

とすれば(小さな k^2では 1 に，大きな k^2では積分を切断するように選んである)，積分は計算できる。m/λ のオーダーを無視すれば，

$$\delta m = m(3e^2/2\pi)[3\ln(\lambda/m) + (3/4)]$$

となる（方法については文献［11］を参照)。

もし，高次項の過程を計算しても，どの場合でも $\ln(\lambda/m)$に比例する項となろう（スピン 1/2 の電子が光子とだけ相互作用しているなら，対数発散より悪いものはないので，問題はない)。ここで m があれば，$m_{\text{exp}} - \delta m$ で置き換え，δm の 1 次まで展開する。すると不思議なことが起こる。$\ln(\lambda/m)$ の係数が恒等的に 0 となるのである。残りの項は $\lambda \to \infty$で，有限な極限を持つ。言い替えれば，問題の解を実験的質量で表し，m_{exp}を固定したままで $\lambda \to \infty$ とすると，切断パラメーター λ の大きさは現れない。

同様にして，束縛電子の自己エネルギーに基づく水素原子のエネルギー準位のずれの計算が試みられた。これは，ラザフォード（E. Rutherford）とラム（W. E. Lamb）の実験によって刺激された。それはマイクロ波の技術を用いて，水素原子の $2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$準位間の約 1000MHz の分離を観測したもので

あった。輻射場との相互作用を無視すれば，これらのレベルは完全に縮退している。非相対論的近似を使って，ベーテは完全でない計算をした。彼の，そしてワイスコップの結果を相対論的に不変な形で定式化し，その計算を完成させようという試みから，1948～1949年に量子電気力学が急速に発展した。

いままでで，量子電気力学に含まれなければならない規則のあることがわかった。(1) 伝搬関数 $1/k^2$ には任意の収束因子 $C(k^2)=-[\lambda^2/(k^2-\lambda^2)]$ をかける。(2) すべてを $m_{\mathrm{exp}}=m+\delta m$ で表す。(3) m_{exp} を固定したままで $\lambda\to\infty$ の極限をとる。

シュヴィンガー (J. S. Schwinger) は非積分関数の段階で無限大を差し引いたが，これは実行するのが極端にむずかしい。彼の方法は，上に述べた規則と完全に等価であることがわかる。

この方法に何かよくないことでもあるだろうか？　いかにも汚く見える方法である。ワイスコップはかつて，もし，神によって荷電した電子と荷電していない電子が与えられたとしたなら，そのときに限って δm を計算せざるをえなくなるのではと言っている。

現実には，たとえば π^+，π^0，π^- など，自然界にはこの切断の方法が適用できない例がある。π^+ と π^0 は質量が違うが，計算すると 2 次で発散する。実際には核子対の雲を含めるべきで，これが無限大を消せると信じている人もいる。しかし，これはまだ証明されていない。

29

量子電気力学

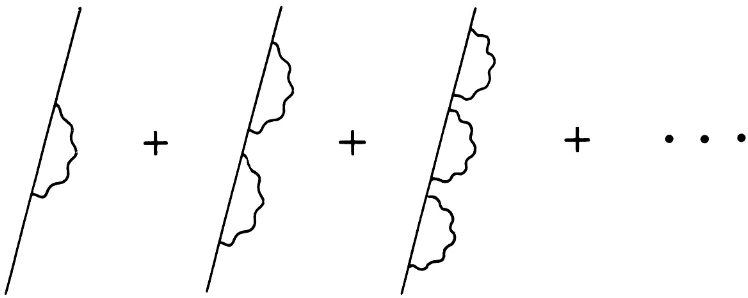
Quantum Electrodynamics

伝搬関数 $1/k^2$ を

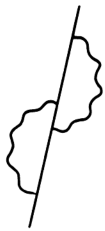
$$-\frac{1}{k^2}\frac{\lambda^2}{(k^2-\lambda^2)}$$

で置き換え，λ を有限に固定して，量子電気力学をやることが可能であるか？　そうすると，発散はなかろうが，切断 λ が新しい定数として導入されることになる。不幸なことに，そのような理論は内部矛盾する。たとえば，励起状態の原子があるとしよう。ここで 2 つの可能性を計算する：(1) 崩壊する確率（つまり，光子を放出する）；(2) 励起状態にとどまる確率。これらの確率の和は m^2/λ^2 に比例する因子だけ 1 からずれる。確率が保存されないのである！　これは修正した伝搬関数を $(1/k^2)-[1/(k^2-\lambda^2)]$ の形に書けばよくわかる。これは別の“光子”，あるいは質量 λ のベクトル粒子の伝搬関数 $-[1/(k^2-\lambda^2)]$ を導入したことになる。負符号は $+e^2$ でなくて，$-e^2$ で結合している，つまり，そのような光子に結合するのは虚数の結合定数 ie でなければならないことを意味するのである。ハミルトニアンはエルミートでなくなり，その結果，確率は保存されず，破綻をきたす。

この問題は誰も解くことができない。量子力学の一般原理（振幅の重ね合わせ）と相対論に矛盾せず，かつ任意関数を含む理論を探す。理論全体が崩れることなしに伝搬関数 $1/k^2$ は修正できない。このような困難は非相対論的量子力学には生じないことに注意しよう。そこでは，任意関数であるポテンシャル $V(r)$ がかなりの領域にわたって変化できる。相対論と量子力学を合わせたものはかなり制限がきびしいが，暗黙のうちにわからない仮定をしていることも明らかである（空間的に無限小の距離のようなところで）。



〈図 29-1〉



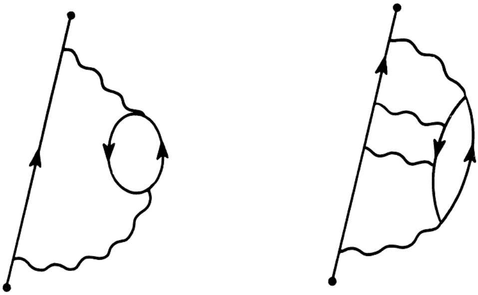
〈図 29-2〉

図 29-1 のダイアグラムの和で自己エネルギーに対する寄与を計算し，それが対数的に発散することを知った。しかしながら，図 29-2 に示した形のダイアグラムが残っていた。この項は e^4のオーダーの寄与を C に，したがって δm に与える。$e^4[\ln(\lambda/m)]^2$のようにふるまう。このようなダイアグラムをすべて含めると，自己エネルギーが有限になりうる可能性がある。ゲルマンとロー (F. E. Low) は $\ln(\lambda/m)$ の最高のオーダーの項，すべてのたし上げに成功し，その結果がなお発散していることを示した。a，b を定数として，C は

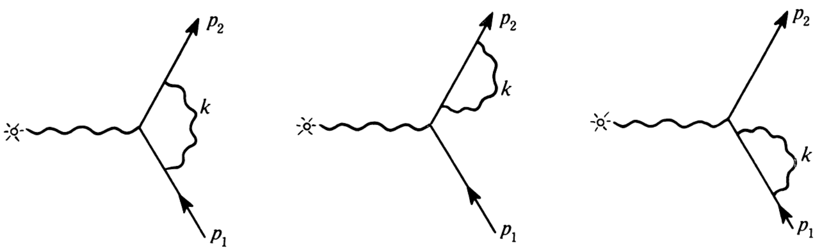
$$(\lambda^2/p^2)ae^2+be^2+\cdots\cdots$$

のようになる。

新しい型のダイアグラムがまだ議論されていない。すなわち，対発生し，それが対消滅する場合である。例として，図 29-3 がある。



〈図 29-3〉



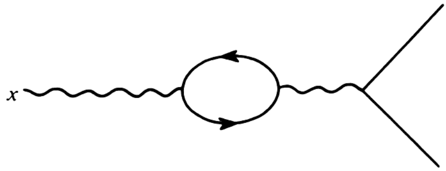
〈図 29-4〉

少し仮想光子の効果を調べてみよう(輻射補正)。たとえば，ポテンシャル $V(r)$ による電子の散乱を考えよう（ポテンシャルの意味の議論は第 30 章を参照)。仮想光子を含む最低次のダイアグラムを図 29-4 に示す。結合定数に対する修正（伝搬関数の $1+r$ の因子）は，これらの 3 つのダイアグラムからの寄与を加えると，消え去る。充分な低エネルギーでは，ポテンシャルをコンプトン波長で滑らかにしたものが正味の効果になる。きわめて大ざっぱには

$$V(r) \longrightarrow V(r) + \mathrm{const}\,(e^2/m^2)\nabla^2 V(r)$$

となる。原子でポテンシャルがこのように変わると，エネルギー単位が修正を受ける。電子と陽子の間に単なるクーロン・ポテンシャルを仮定すれば，ディラック理論による予言では，$2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ は完全に同じエネルギーを持つ。しかしながら，有効な陽子-電子ポテンシャルは $\nabla^2 V(r) = -4\pi\rho$ に比例

する項を持つ（ρ は陽子の電荷密度）。ρ は原点以外では 0 となるので，S 状態にだけ効き，約 1000MHz 変化させる。もし図 29-5 のダイアグラムからの修正(真空偏極)を取り入れれば，理論は 1057.3±0.1MHz の変位を予言する。実験と少しだけ違いがあり，次のオーダーを計算する必要があろう[†]。



〈図 29-5〉

もし外部ポテンシャルが磁場ならば，仮想光子の効果は電子の磁気能率を変えることになる。その有効磁気能率 μ_e は e^4 のオーダーまで計算されており，結果は $\mu_0=e/2m$ として

$$\mu_e=\mu_0[1+(e^2/2\pi)-0.328(e^4/\pi^2)]=\mu_0(1.0011596)$$

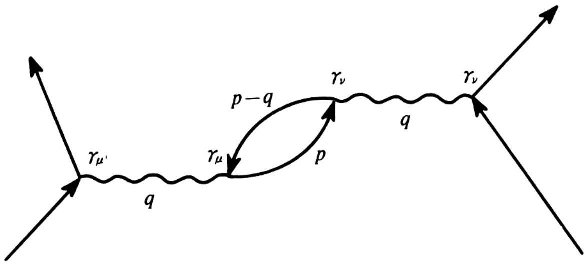
となる[‡]。[e^4の正しい係数は最近になって初めて，ピーターマン(Petermann)とゾンマーフィールド（Sommerfield）とによって求められた。カープラス(Karplus）とクロール（Kroll）による最初の計算は 2.973 であった。] この磁気能率の測定は，μ_e/μ_p を決めることによって行なわれる (μ_p は陽子の磁気能率)。μ_e/μ_p の測定はきわめて正確である。しかしながら，μ_p/μ_0 の実験的決定には 2 つの相反する結果があり，1 つは $\mu_e/\mu_0=1.00146\pm0.000012$ を，もう 1 つは $\mu_e/\mu_0=1.001165\pm0.00011$ を与える（文献［12］を参照)。

電荷のくり込み

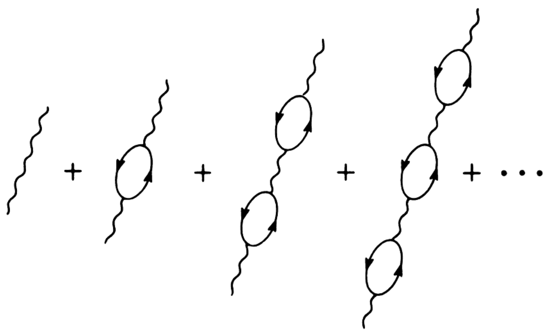
前に，量子電気力学にはこの他の無限大があると言った。図 29-6 のように仮想的な電子-陽電子対が現れる形のダイアグラムがある。ここで，再び図 29

†〔訳注〕輻射補正，核の反跳や核の有限な半径を考慮した理論値は，最近の実験値と 5 桁まで一致している。

‡〔訳注〕最近では e^6 のオーダーまで計算されており，実験値とよく一致している。



〈図 29-6〉



〈図 29-7〉

-7 のダイアグラムの和が作れる。X を電子-陽電子のループからの寄与として，それに対応する級数は

$$\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^2}X\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^2}X\frac{1}{q^2}X\frac{1}{q^2}+\cdots=\frac{1}{q^2-X}$$

となる。

q^2が小さければ，$X=q^2Y$ と書けて，Y はある定数に近づく（実際，これは e^2のあらゆる次数で成り立つ）。したがって，

$$1/(q^2-X)=1/[q^2(1-Y)]$$

となる。伝搬関数の極は依然として $q^2=0$ である。これによって，光子の静止質量が 0 に等しいことが示される。しかしながら，$1/(1-Y)$ という因子が常に e^2にかかって現れる。したがって，実験的に測定される電荷 $e_{\rm exp}$ は

$$e_{\rm exp}=e/(1-Y)^{1/2}$$

となる。この効果は電荷のくり込みといわれる。Y を計算すると，無限大が得られる。しかし，質量の場合と同じ方法で，この対数発散を修正できる。そこでは，電荷を持つ粒子と電荷を持たない粒子という，質量のくり込みに関する物理的な例を見ることができる（第 28 章参照)。電荷のくり込みが物理的な意味をもつといえる説明はまだ知らない。しかしながら，

$$e^2_{\text{exp}}=1/137.0369$$

であることは知っている。将来の理論が理論値についてある簡単な結果を予言するとしよう。たとえば，ベッセル関数のゼロ点とか，あるいはそのたぐいで，

$$e^2_{\text{th}}=1/141$$

であるとする。しかし，電荷のくり込みをしたあとではじめて実験と一致し，$e^2_{\text{exp}}=1/137$ を得るのである。しかし，これはまったくの推測である。

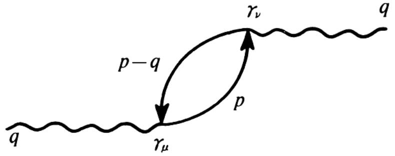
ここで，X がどうなるかを調べよう。図 29-8 の寄与を計算しなければならない。閉じたループの電子線に沿って，光子消滅の振幅 $(4\pi)^{1/2}e\gamma_\mu$，2 つの光子バーテックス間の電子伝搬の振幅 $1/(\not{p}-m)$，分極 ν の光子放出の振幅 $(4\pi)^{1/2}e\gamma_\nu$，電子が出発点に伝搬して戻る振幅 $1/(\not{p}-\not{q}-m)$ がある。したがって，全振幅は

$$4\pi e^2\,\overline{U}_{\rm i}[1/(\not{p}-\not{q}-m)]\gamma_\nu[1/(\not{p}-m)]\gamma_\mu U_{\rm i}$$

となる。ここで，$U_{\rm i}$は電子の初期状態である（仮想電子を表すので，ディラック方程式を満たす必要はない)。しかしながら，可能なあらゆる運動量 p，初期状態 $U_{\rm i}$をとりうる。したがって，

$$X_{\nu\mu}=4\pi e^2\int{\rm Tr}\{[1/(\not{p}-\not{q}-m)]\gamma_\nu[1/(\not{p}-m)]\gamma_\mu\}[d^4p/(2\pi)^4]$$

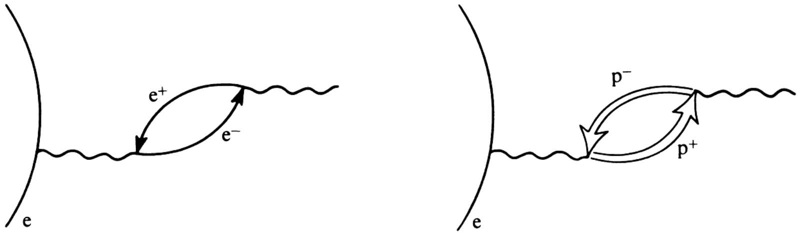
となる。この積分をどう実行するかの詳細は，文献［11］に見られよう。無限大をいかにして除去するかに関しては，最初，パウリとベーテが示唆した。



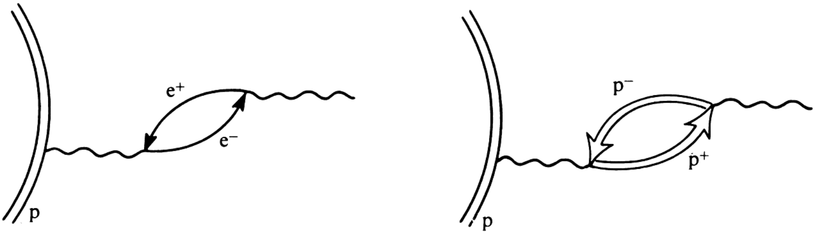
〈図 29-8〉

電子伝搬関数に収束因子をかけて修正することは，その結果としての表現がゲージ不変性を破るので，不可能である。その代わり，電子の質量に m を使って計算し，同じ被積分関数だが，別の質量 M を入れたものを差し引くのである。結果は対数発散であるが，e を e_{exp} に変えて処理できる。

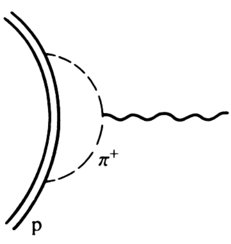
電荷のくり込みは仮想的電子-陽電子対だけでなく，あらゆる荷電粒子の粒子-反粒子対にも行なわれる。それでは，電子の電荷のくり込みは，たとえば陽子のとは違うのであろうか？　答は，違わないのである。もし，電子-光子



〈図 29-9〉



〈図 29-10〉



〈図 29-11〉

結合が図 29-9 に示された型のダイアグラムで修正されるなら，陽子-光子結合も同じダイアグラムを持つ (図 29-10)。(実際には，中間子論を考えれば，図 29-11 のような別のダイアグラムが加わる。これらは異常磁気能率のようなものには効くが，核子の全電荷は変化させない。)

30 中間子理論

Meson Theory

ディラック方程式（あるいは同様にシュレーディンガー方程式）が

$$(i\nabla\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\Psi = 0$$

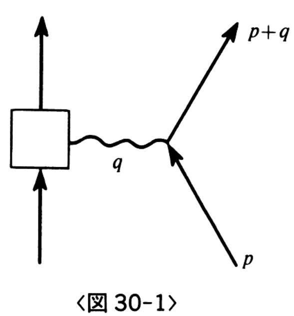
の形に書かれているのをよく見るであろう。ここで，A は**外部**ポテンシャルである。重要なのは，この結果がこれまでに求めてきた基本的な規則の近似であり，その規則から導けることを認識することである。したがって，こう質問できよう。相互作用のある部分が外部ポテンシャルだと，いつ，特定できるのか？

電子が，何らかの機構で仮想光子を生成する相互作用を考えよう。運動量 q，偏極 μ の仮想光子を生成する振幅を $A_\mu(q)$ とする。示されている相互作用の部分を記述する振幅は

$$\int [1/(p\!\!\!/ + q\!\!\!/ - m)]\gamma_\mu[1/(p\!\!\!/ - m)]A_\mu(q)[d^4q/(2\pi)^4]$$

であり（図 30-1），$q+p$ は光子を吸収したあとの電子の“実際の”運動量である。

ところで，ソースは2個，3個，あるいは4個の光子を放出するかも知れな



〈図 30-1〉

い。2光子の場合の適切な伝搬関数は，$f_{\mu\nu}(q_1,\ q_2)$を2光子放出の振幅として

$$\iint \frac{1}{\not p+\not q_1+\not q_2-m}\gamma_\nu \frac{1}{\not p+\not q_1-m}\gamma_\mu \frac{1}{\not p-m} f_{\mu\nu}(q_1, q_2)\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4q_2}{(2\pi)^4}$$

となる。

重要な点は，第1の光子が放出されても，本質的な影響は受けないようなソースが存在することである。このことは

$$f_{\mu\nu}(q_1, q_2)=A_\mu(q_1)A_\nu(q_2)$$

となることを意味する。すなわち，そのようなソースでは，第2の光子が放出される振幅は，第1の光子が放出されるか，されないかには無関係なのである†。そのときに限り，ソースが外部ポテンシャルを生成したと言える。[3光子に対しては$A_\mu(q_1)A_\nu(q_2)A_\sigma(q_3)$など，任意の光子に対しても振幅を厳密に仮定する。]そのとき，外場中の電子の完全な伝搬関数は，任意数の光子が吸収できるので（積分が入っているとして），

$$\frac{1}{\not p-m}+\frac{1}{\not p+\not q-m}\not A(q)\frac{1}{\not p-m}+\frac{1}{\not p+\not q_1+\not q_2-m}\not A(q_2)\frac{1}{\not p+\not q_1-m}\not A(q_1)$$
$$\times\frac{1}{\not p-m}+\cdots$$

となる。

この級数はたし上げられる。2つの方法を示そう。最初に，aを

$$\not a\equiv\not A(q)\left[d^4q/(2\pi)^4\right]$$

として，“実際の”運動量$\not p+\not a_1+\cdots=\not P$を演算子とし，$\not a$にかけるとその値を

---

†要請の1つが，1光子を放出したあとでもソースが同一状態にとどまることなのは明らかである。たとえば重い粒子の場合は，光子放出による反跳は無視できる。

別の例では，もっと微妙であるが，多数の電子を含む大きな磁石を考えよう。このとき，1個の電子では通常の外部磁場は作れない。仮想光子を放出すると，そのほぼ1/2の場合はスピン・フリップするからである。しかし，イオンでは状況が異なる。(1個の電子に対して) 1光子を放出して，そのままの状態にとどまる振幅 (x^2〜1/2) をx，yを別の状態へ移る振幅と定義する。イオンの塊の中にある電子の数をNとしよう。すると，電子が同じ状態にとどまる振幅はNxとなるが，もしスピンがフリップすると，身に覚えのある電子は区別できるので，1電子が状態を変える振幅はyとなる。対応する確率は$(Nx)^2$，Ny^2であり，したがって，状態が変わらないままでいる振幅は，変わるのに比べて$O(\sqrt{N})$だけ実質的に大きくなる。

変えるものと考えよう。そうすると，上記の級数は

$$\frac{1}{\not{p}-m}+\frac{1}{\not{p}-m}\not{a}\frac{1}{\not{p}-m}+\cdots$$

となり，$1/(\not{p}-m-\not{a})$ を展開したものであることがわかる。

別の方法は以下のようなものである。図 30-2 を考えよう。どのダイアグラムにも“最後の”光子が存在する。最後の光子が吸収されてから，場所 a に到着する振幅 Ψ はどうなるであろうか？　ここで Ψ は無数の光子を吸収している振幅でもある。したがって，$[1/(\not{p}-m)]\not{a}\Psi$ [“最後の”光子に先立つ Ψ に“最後の”光子を散乱させる振幅と伝搬関数 $1/(\not{p}-m)$ をかけたもの] に，光子がない振幅 φ をたしたものも，また Ψ となる：

$$\Psi=[1/(\not{p}-m)]\not{a}\Psi+\varphi$$

ただし，

$$(\not{p}-m)\varphi=0$$

である。したがって，

$$(\not{p}-m-\not{a})\Psi=0$$

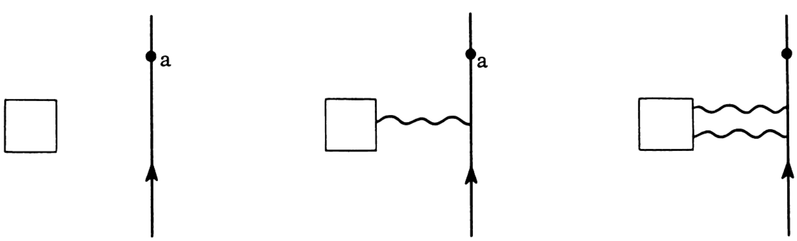
となるのである。あるいはまた，n 光子を吸収した振幅を φ_n とすると，

$$\varphi_{n+1}=[1/(\not{p}-m)]\not{a}\,\varphi_n$$

なので，

$$\Psi=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n=\varphi_0+[1/(\not{p}-m)]\not{a}\Psi$$

となるのである。



〈図 30-2〉

中間子論

現在のところ，定量的な中間子論は存在しない。現在の理論は電気力学の類推に基礎を置いている(表 30-1)。この理論は明らかに人間の頭で作られたものである。自然はもっと独創的であるから，これはよくない。

望むなら，電荷保存を考慮しているやり方で，ダイアグラムを書き下せよう。しかし，ダイアグラムは摂動展開に対応し $g^2=15$(1/137 でない)だから，次に現れる項が前の項よりも重要になってしまう。

γ_5結合は擬スカラー結合（PS）といわれる。擬ベクトル結合（PV）（$\gamma_5 \not{q}$）も可能である。しかしながら，PV 結合はよくないと思われている。分子に余分な運動量があるので，次のオーダーが前のよりひどく発散し，くり込み不可能であると。

この理論が基本的に正しいのなら，正しい近似が何なのかということについて，すでに実験から，何らかのヒントが与えられているはずだと思う。

〈表 30-1〉

	中間子論		電気力学	
伝播関数：	核子	$1/(\not{p}-m_N)$	電子	$1/(\not{p}-m_e)$
	パイオン(スピン 0)	$1/(q^2-m_\pi^2)$	光子(スピン 1)	$-1/q^2$
結合：	$(4\pi g)^{1/2}\,\overline{\Psi}_N\gamma_5\varphi_\pi\Psi_N$		$(4\pi e)^{1/2}\,\overline{\Psi}_e\gamma_\mu a_\mu\Psi_e$	
	パイオンが擬スカラーだから γ_5が現われる。			

31

β崩壊の理論

Theory of β-Decay

電気力学については論じた。定量的計算ができるもう1つの過程はβ崩壊である。最初は，ある核で$N \to P+e+\bar{\nu}$となることが観測された（$\bar{\nu}$は反ニュートリノと定義されている）。ニュートリノについては知っていると思う。エネルギー，運動量，スピンの保存を破らないために，その存在が仮定された。質量は0でもありうるし，スピンは1/2である。

1934年ごろ，フェルミはこの遷移の振幅は$g(\Psi_N \Psi_P \Psi_e \Psi_\nu)$の形に書けると提唱した。ここで$\Psi$は対応する粒子の波動関数である。$\Psi$の微分がないときには，終状態密度だけから電子のエネルギースペクトルが求められる。[これは最初実験的に正しくないように思われた。そこで，コノピンスキー（E. J. Konopinski）とウーレンベック（G. E. Uhlenbeck）は波動関数に微分を含めるべきであると示唆し，実験に合うスペクトルを得た。薄膜中における後方散乱が考慮されていなかったため，実験が完全にまちがっていたのである。ウー(C. S. Wu)さんは，薄く，薄くした薄膜を使って実験を遂行し，この誤りを正した。フェルミが正しかったのである。コノピンスキーとウーレンベックのアイデアはダメになった。]

明らかな問題が1つある。それぞれの波動関数が持つ4成分のうち，どの成分が結合に効くのか？　全部で256の可能性がある。いま尋ねていることは，物理的には，粒子のスピンにどう関係しているかということである。求めねばならないのは，回転とローレンツ変換に対して不変な結合である。

1つの可能性は，スカラー結合として知られている$C_S(\bar{\Psi}_P \Psi_N)(\bar{\Psi}_e \Psi_\nu)$である。他の可能性はベクトル結合

$$C_V(\bar{\Psi}_P \gamma_\mu \Psi_N)(\bar{\Psi}_e \gamma_\mu \Psi_\nu)$$

であり，これも不変である。(フェルミが例としてあげたものである。)

引き続きいろいろ作れる。2 階の反対称テンソル

$$\sigma_{\mu\nu}=(i/2)(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)$$

を使って，テンソル結合

$$C_{\mathrm{T}}(\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}\sigma_{\mu\nu}\Psi_{\mathrm{N}})(\overline{\Psi}_{\mathrm{e}}\sigma_{\mu\nu}\Psi_\nu)$$

が構成できる。残りは擬ベクトル結合

$$C_{\mathrm{A}}(\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}\gamma_\mu\gamma_5\Psi_{\mathrm{N}})(\overline{\Psi}_{\mathrm{e}}\gamma_\mu\gamma_5\Psi_\nu)$$

と擬スカラー結合

$$C_{\mathrm{P}}(\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}\gamma_5\Psi_{\mathrm{N}})(\overline{\Psi}_{\mathrm{e}}\gamma_5\Psi_\nu)$$

である。正しい結合はこれらの 1 次結合である。ここまでは鏡映変換不変性を仮定してきた (パリティの保存)。しかし，$C_{\mathrm{S}}'(\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}\gamma_5\Psi_{\mathrm{N}})(\overline{\Psi}_{\mathrm{e}}\Psi_\nu)$ は回転とローレンツ変換に対して不変だが，鏡映変換では符号を変える。同じことは，余分に γ_5 を 1 つ挿入すれば，他の 4 つの結合についても適用できる。鏡映変換で符号を変える結合と変えない結合を組み合わせれば，パリティが破れよう。その結果，これらの結合は，K^+ メソン崩壊の困難 (τ–θ の謎) がはっきりするまで無視されていた。K^+ は 2π と 3π に崩壊するが，2 つの場合で終状態のパリティが異なる。リーとヤンは，この明らかにパリティ保存が破れていることが弱い崩壊の特徴であるかどうかをはっきりさせるような，いくつかの実験を提案した。^{60}Co に関するウーの実験によれば(第 7 章)，スピンの向きの逆方向に電子が出てきた。これは，空間のある方向に関してある 1 つの回転を関係付けられるということを意味し，したがって鏡映対称性は満たされていないのである。β 崩壊でパリティ保存が破れていることは，数学的には，普通の結合の他に，鏡映変換で符号を変える結合も含まれるべきであることを意味した。係数 C が実数であれば，理論は時間反転に関して不変となる。しかしながら，パリティ保存が破れていることがわかったすぐあとでは，時間反転不変性の正しさも疑われ始めた。したがって，この理論には 10 個の複素定数 C，あるいは 20 個の実定数があったことになる。

次のような提案がリーとヤン，また独立にランダウ (L. D. Landau)，そしてサラム (A. Salam) によって行なわれた。彼らのアイデアは，パリティの保存の破れはニュートリノによるというものである。ニュートリノはいつでも

左向きにスピンしている。(最初，彼らはニュートリノが右向きにスピンしているとしたが，それはまちがっていた。)スピン 1/2 の相対論的粒子を議論するとき，最も簡単な表現は

$$(E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P})u=0$$

あるいは

$$(E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P})v=0$$

を満たす 2 成分振幅であったことを思い出してほしい。リーとヤンが言ったのは，ニュートリノはこれらの状態のうちの 1 つにしか存在できないというものである。ニュートリノの方程式としては

$$(E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P})v=0$$

である。電子の方程式として，1 階の方程式にこだわるのなら，

$$(E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P})u=mv$$

$$(E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P})v=mu$$

と書かねばならなかったことを思い出してほしい。しかしながら，v は 2 階の方程式

$$(E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P})(E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P})v=m^2v$$

も明らかに満足する。ゲルマンと私は電子もまた 2 成分スピノール v で表すことを提案した†。すると，β 崩壊結合は 2 成分スピノール v だけから構成される。微分を使わないと，相対論的不変な結合は

$$G(v_{\mathrm{P}}^*\ \sigma_\mu v_{\mathrm{N}})(v_{\mathrm{e}}^*\ \sigma_\mu v_\nu) \qquad \sigma_4=1,\ \ \sigma_{1,2,3}=\text{パウリスピン行列}$$

だけになる。同じ提案は，おそらくはもう少し早くマルシャーク (Marshak) とスーダルシャン (Sudarshan) によっても行なわれた。

ここで唯一の定数 G を持つ β 崩壊のユニークな理論ができた。それが提案されたときには，実験的に認められていた少なくとも 3 つの実験とくい違っていたが，それらはすべて誤りであったことがわかった。

私は量子電気力学を 2 成分波動関数で教えてみたかった。唯一困るのは，

†〔訳注〕これを(V−A)理論という。以下に説明されているように，弱い相互作用に関与するカレントは，ベクトルカレントと擬ベクトルカレントの差で表せる。弱い相互作用がこのように整理されたことが，後のワインバーグ-サラムの電弱統一理論へ至る 1 つのメルクマールとなった。

読者が他の文献を読めなくなるということであった。そのため，ここでも β 結合を 4 成分表示で書くことにしよう。ここでの γ 行列表示では

$$i\gamma_5=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

となる。a を

$$a=(1/2)(1+i\gamma_5)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

としよう。そのとき，u と v を 2 成分波動関数として

$$\Psi=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

とすると，

$$a\Psi=\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$$

となる。同様に，

$$\bar{a}=(1-i\gamma_5)/2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

に対しては

$$\bar{a}\,\Psi=\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$$

となる。ここで a と $\bar{a}$ は射影演算子である。関係式

$$a^2=a\qquad \bar{a}^2=\bar{a}\qquad a\,\bar{a}=\bar{a}\,a=0\qquad \bar{a}+a=1$$

および a が Ψ から v を射影することを証明できる。したがって，4 成分では結合が

$$G(\overline{a\Psi_{\mathrm{P}}}\,\gamma_\mu a\Psi_{\mathrm{N}})(\overline{a\Psi_{\mathrm{e}}}\,\gamma_\mu a\Psi_\nu)$$

となる。$\bar{a}\gamma_\mu=\gamma_\mu a$，$aa=a$ だから，これは

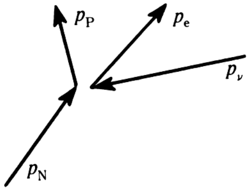
$$G(\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}\gamma_\mu a\Psi_{\mathrm{N}})(\overline{\Psi}_{\mathrm{e}}\gamma_\mu a\Psi_\nu)$$

と簡単化される。23年後に再びフェルミに戻ってきたのである。

フェルミの規則はあらゆるΨを$a\Psi$で置き換えるだけの修正でよい。aを発見するために23年を要した。β結合のすべてにこの置き換えを行なうと，スカラー，テンソル，擬スカラー成分は0となり，ベクトルと擬ベクトルが上記の結果を与えることが簡単に証明できる。歴史的には，サラム，そしてランダウ，それにリーとヤンが，ニュートリノには常にaがかかると提案した。その後，私は電子とミューオンには同様なことを提案したが，実験的によくないことがあると信じていたので，中性子と陽子に適用することはためらった。最終的に，マルシャークとスーダルシャン，ゲルマンと私が，あらゆるΨを$a\Psi$で置き換えるという一般的な規則を提案したのであった。

ここで，この理論の物理的内容が何であるか見てみよう。このために，偏極した中性子の崩壊を調べよう。簡単のために核子の運動と陽子のスピンを無視する（核子質量を$M\to\infty$とする）。この過程の振幅mは

$$m=G(\overline{U}_{\mathrm{P}}\gamma_\mu aU_{\mathrm{N}})(\overline{U}_{\mathrm{e}}\gamma_\mu aU_\nu)$$



となる。陽子の2つのスピン状態の和をとったm^*mに興味がある。中性子と電子に対して，射影演算子$(1/2)(1+i\not{W}_{\mathrm{N}}\gamma_5)$と$(1/2)(1+i\not{W}_{\mathrm{e}}\gamma_5)$を使えば，

$$\sum_{\text{陽子スピン}} m^*m=G^2\mathrm{Tr}\{\gamma_\nu a(\not{p}_{\mathrm{P}}+M)\gamma_\mu a(\not{p}_{\mathrm{N}}+M)\times[(1+i\not{W}_{\mathrm{N}}\gamma_5)/2]\}\times\mathrm{Tr}\{\gamma_\nu a(\not{p}_{\mathrm{e}}+m)[(1+i\not{W}_{\mathrm{e}}\gamma_5)/2]\gamma_\mu a\not{p}_\nu\}$$

となる。最初に核子の座標を含むトレースを考えよう†。$a^2=a$と$\bar{a}a=0$を使って，aの1つを消す。すると，

$$\mathrm{Tr}\{a\gamma_\nu(\not{p}_{\mathrm{P}}+M)\gamma_\mu a(\not{p}_{\mathrm{N}}+M)[(1+i\not{W}_{\mathrm{N}}\gamma_5)/2]\}$$

†ニュートリノには普通の規格化$\overline{U}U=2m$が適用できない。しかしながら，トレースは計算できる。$m\to0$の極限で起こることは，射影演算子が単に$\not{p}$となるに過ぎない。

$$=(1/2)\,\mathrm{Tr}[\gamma_\nu \not{p}_{\mathrm{P}} \gamma_\mu (\not{p}_{\mathrm{N}}+M)(1+i\not{W}_{\mathrm{N}}\gamma_5)\,\bar{a}]$$

となる。ここで

$$(1+i\not{W}_{\mathrm{N}}\gamma_5)\,\bar{a}=(1-\not{W}_{\mathrm{N}})\,\bar{a}$$

である。奇数の γ 行列のトレースは 0 なので，

$$(1/2)\,\mathrm{Tr}[\gamma_\nu \not{p}_{\mathrm{P}} \gamma_\mu (\not{p}_{\mathrm{N}}-M\not{W}_{\mathrm{N}})(1-i\gamma_5)]$$

が残る。中性子の偏極を z 軸に沿ってとろう。$M\to\infty$ の極限で，これは

$$(M^2/2)\,\mathrm{Tr}[\gamma_\nu\gamma_t\gamma_\mu(\gamma_t+\gamma_z)(1-i\gamma_5)]$$

となる。関係式

$$(1/4)\,\mathrm{Tr}\,\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}=(a\cdot b)(c\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)$$

を使えば，

$$(1/4)\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\gamma_t\gamma_\mu\gamma_t=2\delta_{\nu t}\delta_{\mu t}-\delta_{\mu\nu}$$

$$(1/4)\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\gamma_t\gamma_\mu\gamma_z=\delta_{\nu t}\delta_{\mu z}+\delta_{\nu z}\delta_{\mu t}$$

が得られる。（より簡単な方法は $\mu,\nu=t,x,y,z$ の特別な場合を導くことである。）また，

$$(1/4)\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\gamma_t\gamma_\mu\gamma_t\gamma_5=0$$

$$(1/4)\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\gamma_t\gamma_\mu\gamma_z\gamma_5=-\delta_{\nu x}\delta_{\mu y}+\delta_{\nu y}\delta_{\mu x}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}(1/4)\,\mathrm{Tr}[\gamma_\nu\gamma_t\gamma_\mu(\gamma_t+\gamma_z)(1-i\gamma_5)]=&\,2\delta_{\mu t}\delta_{\nu t}-\delta_{\mu\nu}+\delta_{\mu\nu}\delta_{\nu z}\\&+\delta_{\mu z}\delta_{\nu t}\\&-i(\delta_{\mu x}\delta_{\nu y}-\delta_{\mu y}\delta_{\nu x})\end{aligned}$$

となる。電子ニュートリノを含むトレースも

$$(1/2)\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{p}_\nu\gamma_\nu(\not{p}_{\mathrm{e}}-m\not{W}_{\mathrm{e}})(1-i\gamma_5)]$$

の形に簡単化できる。そこで

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\nu\gamma_t\gamma_\mu(\gamma_t+\gamma_z)(1-i\gamma_5)]\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{p}_\nu\gamma_\nu(\not{p}_{\mathrm{e}}-M\not{W}_{\mathrm{e}})(1-i\gamma_5)]$$

を計算しなければならない。左側のトレースに求めた表現を代入すると

$$\begin{aligned}4\mathrm{Tr}[&(2\gamma_t\not{p}_\nu\gamma_t-\gamma_\mu\not{p}_\nu\gamma_\mu+\gamma_t\not{p}_\nu\gamma_z+\gamma_z\not{p}_\nu\gamma_t-i\gamma_x\not{p}_\nu\gamma_y\\&+i\gamma_y\not{p}_\nu\gamma_x)(\not{p}_{\mathrm{e}}-M\not{W}_{\mathrm{e}})(1-i\gamma_5)]\end{aligned}$$

を得る。トレースを計算すると，この表現は

$$17(E_\nu+P_{\nu z})(E_{\mathrm{e}}-MW_{\mathrm{e}t})$$

と簡単になる。電子の静止系で，$W_{\mathrm{e}t}=0$，$\mathrm{W}_{\mathrm{e}}=\varepsilon(\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}/P_{\mathrm{e}})$ である。ただし，

右にスピンしている電子は $\varepsilon=+1$ であり，左にスピンしている電子は $\varepsilon=-1$ である。W_e は4元ベクトルとして変換するので，実験室系では

$$W_{et}=\gamma(0+v_e\varepsilon)=\varepsilon(E_e/m)v_e, \qquad v_e=\text{電子の速度}$$

となる。最後に，中性子のスピンと放出された反ニュートリノの方向とのなす核を θ_ν とすると，

$$\sum m^* m=4G^2M^2E_eE_\nu(1+\cos\theta_\nu)(1-\varepsilon v_e)$$

を得る。このことから，

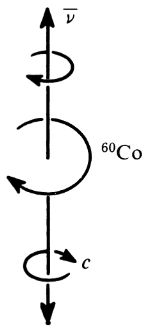
$$\text{左向きにスピンしている電子の確率}=(1/2)[1+(v_e/c)]\simeq 1, \quad v\simeq c$$

$$\text{右向きにスピンしている電子の確率}=(1/2)[1-(v_e/c)]\simeq 0, \quad v\simeq c$$

であることが言える。したがって，β 崩壊から出てくる電子は左向きにスピンするように偏極している。ニュートリノは常に左向きにスピンしている（反ニュートリノは右向き）。相対論的電子はその静止質量が無視できるので，ニュートリノのようにふるまうことに注意しよう。

電子が等方的に放出されるとしても，反ニュートリノは $(1+\cos\theta)$ の分布で中性子のスピンに沿って放出されやすい。

この結果は $^{60}Co\to{}^{60}Ni$ の実験に合っているのがわかる。核のスピンは5と4であり，したがって，全角運動量は1だけ変化する。ニュートリノは ^{60}Co 核のスピンに沿って放出されやすく，その伝搬方向に沿って，1/2 単位の角運動量を持ち去る。したがって，角運動量を保存するためには電子が後方へ放出されねばならない（図 31-1)。



〈図 31-1〉

電子のエネルギー・スペクトル dN は

$$dN \simeq (E_{\mathrm{e}} - E_0)^2 P_{\mathrm{e}} E_{\mathrm{e}} dE_{\mathrm{e}}$$

であり，終状態密度だけに関係する（第 16 章)。ここで，

$$E_0 = M_{\mathrm{N}} - M_{\mathrm{P}}$$

である。中性子の崩壊の割合は

$$1/\tau = [G^2/(2\pi)^3] \int_0^{E_0} (E_{\mathrm{e}} - E_0)^2 P_{\mathrm{e}} E_{\mathrm{e}} dE_{\mathrm{e}}$$

となる。

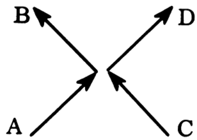
32

β崩壊結合の性質

Properties of the β-Decay Coupling

A＋C → B＋D という過程を考えよう。この振幅は

$$\text{Amp.}=(\bar{\text{B}}\ \text{A})(\bar{\text{D}}\ \text{C})=(\nu_{\text{B}}^{*}\sigma_{\mu}\nu_{\text{A}})(\nu_{\text{D}}^{*}\sigma_{\mu}\nu_{\text{C}})$$



となる。ただし，ν は 2 成分波動関数，$\sigma_t=1$，$\sigma_{x,y,z}$はパウリスピンである。中性子崩壊は N⟶ P＋e＋ $\bar{\nu}$（あるいは N＋ν⟶ P＋e）に対応する。ν の成分で結合を展開すると，

$$(\bar{\text{B}}\ \text{A})(\bar{\text{D}}\ \text{C})=2(\text{B}_1\text{D}_2-\text{B}_2\text{D}_1)^{*}(\text{A}_1\text{C}_2-\text{A}_2\text{C}_1)$$

となる。ただし，

$$\nu_{\text{A}}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix},\ \text{etc.}$$

である。A ⟷ C あるいは B ⟷ D を入れ換えると，符号だけが変わる。したがって，

$$(\nu_{\text{B}}^{*}\sigma_{\mu}\nu_{\text{A}})(\nu_{\text{D}}^{*}\sigma_{\mu}\nu_{\text{C}})=-(\nu_{\text{D}}^{*}\sigma_{\mu}\nu_{\text{A}})(\nu_{\text{B}}^{*}\sigma_{\mu}\nu_{\text{C}})$$

となる。また，$\nu_{\bar{\text{B}}}=\sigma_y\nu_{\text{B}}^{*}$とすると，明らかにこれは$2(\nu_{\bar{\text{C}}}^{*}\ \nu_{\text{A}})(\nu_{\text{D}}^{*}\nu_{\bar{\text{B}}})$にも等しい。$\nu_{\bar{\text{B}}}$が反粒子$\bar{\text{B}}$の波動関数であることは容易に示せる。4 成分表示では

$$\begin{aligned}(\bar{\text{B}}\ \text{A})(\bar{\text{D}}\ \text{C})&=(\bar{\Psi}_{\text{B}}\gamma_{\mu}a\Psi_{\text{A}})(\bar{\Psi}_{\text{D}}\gamma_{\mu}a\Psi_{\text{C}})\\&=(\bar{\Psi}_{\text{D}}\gamma_{\mu}a\Psi_{\text{A}})(\bar{\Psi}_{\text{B}}\gamma_{\mu}a\Psi_{\text{C}})\\&=2(\bar{\Psi}_{\bar{\text{C}}}\ a\Psi_{\text{A}})(\bar{\Psi}_{\text{D}}\bar{a}\Psi_{\bar{\text{B}}})\end{aligned}$$

となる。ただし，

$$a=(1/2)(1+i\gamma_5)$$

である。計算するには最後の表示が最も簡単である。B と C は，あたかも反粒子であるかのように取り扱えばよい。たとえば，中性子崩壊振幅 m は $2G(U_{\bar{\nu}}aU_{\mathrm{N}})(\bar{U}_{\mathrm{e}}\bar{a}U_{\bar{\mathrm{P}}})$ である。すると，

$$\sum_{\text{陽子スピン}} m^*m=4G^2\mathrm{Tr}\{\bar{a}\ (-\not{p}_\nu)a(\not{p}_{\mathrm{N}}+M)[(1+i\not{W}_{\mathrm{N}}\gamma_5)/2]\}$$
$$\times\mathrm{Tr}\{a(\not{p}_{\mathrm{e}}+m_{\mathrm{e}})[(1+i\not{W}_{\mathrm{e}}\gamma_5)/2]\bar{a}\ (-\not{p}_{\mathrm{P}}+M)\}$$
$$=(1/4)G^2\mathrm{Tr}[\not{p}_\nu(\not{p}_{\mathrm{N}}-M\not{W}_{\mathrm{N}})]\mathrm{Tr}[(\not{p}_{\mathrm{e}}-m_{\mathrm{e}}\not{W}_{\mathrm{e}})\not{p}_{\mathrm{P}}]$$
$$=4G^2p_\nu\cdot(p_{\mathrm{N}}-MW_{\mathrm{N}})(p_{\mathrm{e}}-m_{\mathrm{e}}W_{\mathrm{e}})\cdot p_{\mathrm{P}}$$

となる。$M\to\infty$ の極限で，これは

$$=4G^2M^2E_{\mathrm{e}}E_\nu(1+\cos\theta_\nu)(1-\varepsilon v_{\mathrm{e}})$$

となる。この結果を計算するための仕事量を

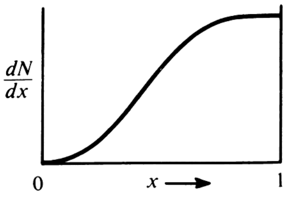
$$m=G(\bar{U}_{\mathrm{P}}\gamma_\mu aU_{\mathrm{N}})(\bar{U}_{\mathrm{e}}\gamma_\mu aU_\nu)\qquad\text{(第 31 章)}$$

を使ったときと比べてみよう。

ここで，電子は粒子（時間に順行している）という約束で，陽子と中性子も粒子であると仮定した［$(\bar{\mathrm{P}}\ \mathrm{N})(\bar{\mathrm{e}}\ \nu)$ の結合］。すると，ニュートリノの角分布は中性子スピンに関して $1+\cos\theta_\nu$ のようになるが，電子は等方的に出てくる。N と P が反粒子であると仮定すると［$(\bar{\mathrm{N}}\ \mathrm{P})(\bar{\mathrm{e}}\ \nu)$ の結合］，ニュートリノは等方的に出てくるが，電子は $1+\cos\theta_{\mathrm{e}}$ のようになる。テレグディ（V. L. Telegdi）たち[13]は偏極した中性子からの電子の角分布 $1+A\cos\theta_{\mathrm{e}}$ とニュートリノの角分布 $1+B\cos\theta_\nu$ を測定して，$A=-0.09\pm0.03$, $B=+0.88\pm0.15$ を得た。これは N と P が粒子であるとする普通の約束と一致する。

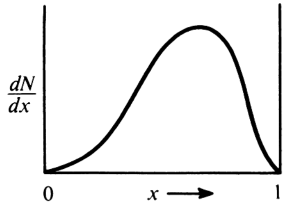
μ 崩壊を説明するために，μ^- を電子のような粒子と仮定して $(\bar{\nu}\ \mu)(\bar{\mathrm{e}}\ \nu)$ という結合も仮定しよう。電子のエネルギー・スペクトル dN を計算すると（電子の運動量とミューオンの質量に比べ，電子の質量を無視して），

$$dN=2x^2(3-2x)\,dx$$



となることがわかる。ただし，$x=P_e/P_m$ であり，$P_m=m_\mu/2$ は電子の最大エネルギーである。もし μ^- が反粒子だとしたら，結合はそうでなく，

$$(\bar{\mu}\ \nu)(\bar{e}\ \nu)$$



となり，電子のスペクトルは

$$dN=12x^2(1-x)$$

となることがわかる。測定は，μ^- を粒子としたときのスペクトルと一致する。β 崩壊からの粒子はすべて左向きである。

中性子と μ の崩壊の結合定数が同一であることがわかった。(前の G は忘れて) $\sqrt{8}\,G$ で結合定数を決めれば，

$$GM_P^2=(1.01\pm0.01)\times10^{-5}$$

となる (G を無次元にするため陽子質量を導入した)。β 崩壊過程に対する振幅は J^*J に比例するといえる。ただし，J は

$$J=\sum(\bar{\mathrm{B}}\ \mathrm{A}) \qquad \bar{\mathrm{B}}\ \mathrm{A}=(\bar{\Psi}_B\gamma_\mu a\Psi_A)$$

の形の項をいろいろな粒子 A，B の組み合わせについて和をとったものである。これらの粒子として何がとれるであろうか？　いままでに

$$J=(\bar{e}\ \nu)+(\bar{\mathrm{N}}\ \mathrm{P})+(\bar{\mu}\ \nu)+(\text{ストレンジ粒子})$$

のように，ストレンジ粒子を含まない部分についてだけははっきりした。交差項 $(\bar{\mathrm{P}}\ \mathrm{N})(\bar{e}\ \nu)$ は N の崩壊を，$(\bar{\nu}\mu)(\bar{e}\ \nu)$ は μ 崩壊を，そして $(\bar{\nu}\mu)(\bar{\mathrm{N}}\ \mathrm{P})$ は μ 捕獲を与える。[$(\bar{\mathrm{A}}\ \mathrm{B})^*=(\bar{\mathrm{B}}\ \mathrm{A})$ に注意しよう。]

β 崩壊について，もう 1 つだけ言うことがある。再び中性子崩壊

$$m=\sqrt{8}\,G\{\bar{\Psi}_P[(\gamma_\mu+i\gamma_\mu\gamma_5)/2]\Psi_N\}\bar{\Psi}_e\gamma_\mu a\Psi_\nu$$

を考えよう。普通，中性子と陽子はきわめてゆっくりと運動する。したがって，非相対論的近似を探すことが非常に大切となる。ディラック方程式を使えば，

$$\bar{\Psi}_P\gamma_\mu\Psi_N=(1/2M)\,\bar{\Psi}_P(\not{p}_P\gamma_\mu+\gamma_\mu\not{p}_N)\Psi_N$$

となる。陽子と中性子が静かにしていれば

$$\not{p}_{\mathrm{P}}=\not{p}_{\mathrm{N}}=M\gamma_t$$

なので,

$$\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}\gamma_\mu\Psi_{\mathrm{N}}=\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}\Psi_{\mathrm{N}}\delta_{\mu 4}=\begin{cases}2M\delta_{\mu 4} & \text{陽子スピンが中性子スピンと平行な場合}\\ 0 & \text{陽子スピンが中性子スピンと平行でない場合}\end{cases}$$

となる。これはフェルミ結合の部分である。

同様な方法で,

$$\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}i\gamma_\mu\gamma_5\Psi_{\mathrm{N}}=\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}\sigma_\mu\Psi_{\mathrm{N}}\qquad \mu=1,2,3$$
$$=0\qquad \mu=4$$

が出てくる。これはガモフ-テラー結合である。フェルミ結合では不十分であることがすぐにわかった。それは，核の全角運動量を変化させないからである。そこで，ガモフ（G. Gamow）とテラー（E. Teller）は単位角運動量を持ち運べる σ に比例する項を示唆したのであった。

ストレンジ粒子を含まないカレントの3項が同じ大きさを持つと提案した。しかしながら，π 相互作用がその大きさを有効結合定数に修正するであろう。因子を組み替えて，フェルミ結合部分が変わらないようにすることは可能である。しかしながら，ガモフ-テラー結合部分には因子 $x=1.25$ をかけねばならない（文献［14］）。^{14}O 崩壊は $0\to 0$ 遷移なので，ガモフ-テラー結合からの寄与は0となる。この結合定数は μ の寿命から求められたものと5％の精度で一致する。

最近，この理論がめざましいほどに確立されたが，それは π-e 崩壊の観測についてである。π-μ と π-e の崩壊率の絶対値は計算できない。しかし，その比は求められる。この夏まで π-e 崩壊は確定されていない†。

†〔訳注〕1992年の実験データでは，π-e 崩壊の分岐比は $(1.218\pm 0.014)\times 10^{-4}$ である。

33

まとめ

Summary of the Course

少数の粒子を含む過程に関する規則を作った。多数の粒子を含む過程は基本的過程で理解できるので，ある意味では，以下のようにすれば，あらゆる物理を記述したことになる：

振幅を計算する規則		
伝播関数	：スピン 0	$i/(p^2-m^2)$
	スピン 1/2	$i/(\not{p}-m)$
	光子	$-(i/k^2)$
電磁的結合	：スピン 1/2	$-i(4\pi)^{1/2}e\ \bar{v}\not{\varepsilon}u$
	スピン 0	$-i(4\pi)^{1/2}e(p_1+p_2)\cdot\varepsilon+i4\pi e^2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$
β 崩壊結合	：J^*J	

この規則とは別に，中間運動量が決まっていないときには，$d^4p/(2\pi)^4$で積分しなければならない。

閉じたループでは負符号をつけて，トレースをとる。

同種粒子の場合，交換した振幅は，整数スピンでは＋符号，半整数スピンでは－符号をとる。挑戦してみよう：この最後の規則は，他のものと独立ではない。スピン 1/2 に対して＋符号を使うと，意味のない結果が得られる。しかしながら，私は完全な証明を持っていない。

読者は実際にやってみないうちは何もわからないのである。いまや，物理の多くの問題を，自分自身で計算できるようになった。しかし，まだすべてができるわけでない。たとえば，多電子原子である。答はいままでの規則に入っているが，読者はこれらの規則の非相対論的な使い方を学ばねばならない。それがシュレーディンガー方程式に相当する。また，形式理論に基礎をおく論文を読むことも容易ではなかろう。しかしながら，まずその物理の問

題が何なのかを調べ，それからそれを解くことを試みよ。最後になるが，この講義でふれなかった物理の 1 分野，チュー-ロー (Chew-Low) 理論と分散関係がある。これは強い結合の場の理論と思われる方法である。π メソンと核子散乱，π メソンの光生成を研究した結果，チュー (G. F. Chew) とローは π-核子相互作用振幅の近似公式を発見した。それは

$$(f/\mu)\gamma_5 \not{q} \qquad f^2=0.08$$

である†。これは，エネルギーがあまり大きくないときに限って，機能するのである。

†〔訳注〕ここで μ は π メソン質量である。

補注

Notes

フェルミ結合とワインバーグ-サラム理論［6章］

現在ではフェルミ結合も電磁的結合と同じくゲージ理論で記述されている。ワインバーグ(S. Weinberg)とサラム(A. Salam)，グラショウ(S. Glashow)は，2つの相互作用を $SU(2)_L \times U(1)$ ゲージ理論に統一した。この理論には力を媒介する4種のゲージボソンが存在し，高エネルギー領域ではまったく同等に相互作用する。しかし，100GeV程度以下のエネルギースケールでは対称性が破れ，100GeV程度の質量を持つ $W^{\pm}$，Z^0 ボソンと質量0のままの光子に分離する。質量が重いボソンが交換すると，有効結合定数は質量の2乗に逆比例するので，$W^{\pm}$，Z^0 が弱い相互作用に関与するのに対し，光子は電磁相互作用に関与する。つまり，4本のフェルミ粒子が1点で相互作用しているフェルミ結合も，実は2つに割った2本のフェルミオンのカレント間に $W^{\pm}$ や Z^0 が交換しているゲージ相互作用として記述できる。しかしながら，崩壊過程などの低エネルギー領域では，フェルミ結合が実用に耐える有効理論であることには変らない。

標準理論について［8章］

現在では素粒子の相互作用はクォーク・レプトンレベルで理解される。このレベルでは強い相互作用も $SU(3)$ ゲージ理論で記述でき，クォークを結び付ける力を媒介するゲージ粒子はグルーオンと呼ばれる。この場の量子論を量子色力学という。非アーベル群 $SU(3)$ を特徴づける3つの自由度に，赤，青，緑のような3色を対応させたことからこの名前が由来している。きわめて近距離の相互作用では，理論に内在する漸近的自由のため，有効結合定数

が小さくなり摂動計算が有効だが，ここで議論されているような核力では非摂動効果が大きくなり，信頼できる近似計算法が存在していない。最近では，時空間をさいの目に分割して近似する格子ゲージ理論に従って，スーパーコンピューターを駆使してハドロン質量や崩壊振幅などの物理量が計算されている。

また，前項といっしょにすると，100GeV 以下のエネルギー領域における素粒子現象は，クォーク・レプトンレベルでの電弱相互作用のワインバーグ・サラム $SU(2)_L \times U(1)$ ゲージ理論と強い相互作用の $SU(3)$ ゲージ理論によってうまく記述できており，これを標準模型という。

文献

References

[1] P. A. M. Dirac, "Principles of Quantum Mechanics", 4th ed., Oxford, New York, 1958, Chap. 1.

[2] R. P. Feynman, *Revs. Modern Phys.*, **20**, 367 (1948).

[3] D. Bohm, "Quantum Theory", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1951, Chap. 6.

[4] W. Pauli, *Phys. Rev.*, **58**, 716 (1940).

[5] G. Lüders and B. Zumino, *Phys. Rev.*, **110**, 1450 (1958).

[6] W. Pauli and V. Weisskopf, *Helv. Phys. Acta*, **7**, 709 (1934).

[7] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **106**, 1296 (1957).

[8] R. H. Dalitz, Physical Society (London), *Reports on Progress in Physics*, **20**, 163 (1957).

[9] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**, 749 (1949).

[10] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **74**, 939 (1948).

[11] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949).

[12] C. M. Sommerfield, *Phys. Rev.*, **107**, 328 (1957).

[13] V. L. Telegdi *et al.*, *Phys. Rev.*, **110**, 1214 (1958).

[14] R. P. Feynman and M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **109**, 193 (1958).

素粒子の表†

粒子		スピン	ストレンジネス	T	T_z	質量〔MeV〕	寿命〔sec〕	崩壊モード	分岐比
重力子	g	2				0	安定		
光子	γ	1				0	安定		
レプトン	e^-	1/2				0.51099906 ± 0.00000015	安定		
	μ^-	1/2				105.658389 ± 0.000034	$(2.19703\pm0.00004)\times10^{-6}$	$e^-+\nu+\bar{\nu}$	~1
								$e^-+\gamma$	$<4.9\times10^{-11}$
								$e^-+e^++e^-$	$<1.0\times10^{-12}$
								$e^-+\nu+\bar{\nu}+e^++e^-$	$(3.4\pm0.4)\times10^{-5}$
	ν	1/2				0	安定		
メソン	$\pi^\pm$	0	0	1	±1	139.5679 ± 0.0007	$(2.6030\pm0.0024)\times10^{-8}$	$\mu^\pm+\begin{Bmatrix}\nu\\\bar{\nu}\end{Bmatrix}$	~1
								$e^\pm+\begin{Bmatrix}\nu\\\bar{\nu}\end{Bmatrix}$	$(1.218\pm0.014)\times10^{-4}$
	π^0	0	0	1	0	134.9743 ± 0.0008	$(8.4\pm0.6)\times10^{-17}$	2γ	1
	K^+	0	1	1/2	1/2	493.646 ± 0.009	$(1.2371\pm0.0029)\times10^{-8}$	$\pi^++\pi^-+\pi^+$	0.0559 ± 0.0005
								$\pi^++\pi^0+\pi^0$	0.0173 ± 0.0004
								$\pi^++\pi^0$	0.2117 ± 0.0016
								$\mu^++\nu+\pi^0$	0.0318 ± 0.0008
								$e^++\nu+\pi^0$	0.0482 ± 0.0006
								$\mu^++\nu$	0.6351 ± 0.0019
	K^0	0	1	1/2	$-1/2$	497.671 ± 0.031	K_1^0：$(0.8922\pm0.0020)\times10^{-10}$	$\pi^0+\pi^0$	0.3139 ± 0.0028
								$\pi^++\pi^-$	0.6861 ± 0.0028
							K_2^0：$(5.17\pm0.04)\times10^{-8}$	$\pi^0+\pi^0+\pi^0$	0.216 ± 0.008
								$\pi^0+\pi^++\pi^-$	0.1238 ± 0.0021

								$\mu^{\pm}+\left\{\begin{matrix}\nu\\ \bar{\nu}\end{matrix}\right\}+\pi^{\mp}$	0.270 ± 0.004
								$e^{\pm}+\left\{\begin{matrix}\nu\\ \bar{\nu}\end{matrix}\right\}+\pi^{\mp}$	0.387 ± 0.005
バリオン	{ p	1/2	0	1/2	1/2	938.27231 ± 0.00028	安定		
	n	1/2	0	1/2	$-1/2$	939.56563 ± 0.00028	889.1 ± 2.1	$p+e^-+\nu$	1
	Λ	1/2	-1	0	0	1115.63 ± 0.05	$(2.632\pm0.020)\times10^{-10}$	$p+\pi^-$	0.641 ± 0.005
								$n+\pi^0$	0.357 ± 0.005
								$p+e^-+\bar{\nu}$	$(8.34\pm0.14)\times10^{-4}$
								$p+\mu^-+\bar{\nu}$	$(1.57\pm0.35)\times10^{-4}$
	{ Σ^+	1/2	-1	1	1	1189.37 ± 0.07	$(0.799\pm0.004)\times10^{-10}$	$n+\pi^+$	0.4830 ± 0.0030
								$p+\pi^0$	0.5157 ± 0.0030
								$n+e^++\nu$	$<5\times10^{-6}$
								$n+\mu^++\nu$	$<3.0\times10^{-5}$
								$\Lambda+e^++\nu$	$(2.0\pm0.5)\times10^{-5}$
	Σ^0	1/2	-1	1	0	1192.55 ± 0.10	$(7.4\pm0.7)\times10^{-20}$	$\Lambda+\gamma$	1
	Σ^-	1/2	-1	1	-1	1197.43 ± 0.06	$(1.479\pm0.011)\times10^{-10}$	$n+\pi^-$	0.99848 ± 0.00005
								$n+e^-+\bar{\nu}$	$(1.017\pm0.034)\times10^{-3}$
								$n+\mu^-+\bar{\nu}$	$(4.5\pm0.4)\times10^{-4}$
								$\Lambda+e^-+\bar{\nu}$	$(5.73\pm0.27)\times10^{-5}$
	{ Ξ^0	半整数	-2	1/2	1/2	1314.9 ± 0.6	$(2.90\pm0.09)\times10^{-10}$	$\Lambda+\pi^0$	1
	Ξ^-	半整数	-2	1/2	$-1/2$	1321.32 ± 0.13	$(1.639\pm0.015)\times10^{-10}$	$\Lambda+\pi^-$	1

†〔訳注〕実験データは最新のものに変更した：Particle Data Group, *Phys. Rev.* **D45**, Part 2 (June 1992).

訳者あとがき

Postscript

本書はR. P. Feynman : “The Theory of Fundamental Processes”, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Frontiers in Physics（第7版，1987年）の訳である。同じシリーズにある“Quantum Electrodynamics”と対になるものであるが，素粒子物理学における基本的問題を扱っている。初版は1962年である。

ファインマンは朝永振一郎，J. シュヴィンガーと共に，“量子電磁気学の基礎研究”で1965年度ノーベル物理学賞を受賞している。1939年，21才のファインマンはMITからプリンストン大学に移り，ウィーラーのもとで学位論文の研究を始めた。この研究は，それからロス・アラモスでのマンハッタン計画への参加，コーネル大学へ助教授として着任という，ほぼ1951年頃までの時期に行われた仕事であった。1951年にはカルテクに移り，コーネル大学やシカゴ大学の招聘にもかかわらず，亡くなるまでそこを動かなかった。カルテクはファインマンにとって，実に居心地よく，そこの生活を楽しんだようである。

1953年から1958年にかけて，ファインマンは主として凝縮系の物理学に取り組んだ。この時期に彼は超伝導や超流動，そしてポーラロンについて研究し，それにファインマンダイアグラムと経路積分を駆使したが，現在，凝縮系の物理の研究にそれらは不可欠となっている。本書は“はじめに”にあるように，その頃ファインマンが慕っていたベーテのいた，そしてまた，ファインマンの古巣でもあったコーネル大学で行った一連の特別講義をもとにしている。もともと彼は気取らない人であったが，このレクチャーにもその雰囲気は現れている。

研究者としてのファインマンの業績がすばらしいのは誰でも知っている

が，彼はすばらしい教師でもあった。1961〜62年度と1962〜63年度にカルテクの1年生と2年生に物理学を講義したが，それがいわゆる“ファインマン物理学”である。これは不朽の名著といわれているが，普通の教科書的な意味で学部学生が試験問題をうまく解けるようになるというものではない。しかし，そこで彼は物理についてどう考え，どう説明するのか，その方法を説きたかったのであろう。

本書にもその傾向が現れている。ファインマンは彼の理解していることにしたがって，物理を再構成し，それを学生に提示しているのである。私たちはそれを通して素粒子物理学に関する知識を学びとるだけでなく，ファインマンの物理に対する態度を推測することもできよう。物理現象を究極的に理解するためには，“…複雑な定式化の中に埋没してしまいがちではあるが，ある種の単純さがある。…この単純さが必要欠くべからざるもの”なのである。ワインバーグ-サラム理論の重要な契機となったファインマン-ゲルマンのV－A理論誕生の経緯は，その実践でもあり，まさに1つの歴史でもある。そしてまた，その後ファインマンのこの予見はその通りとなり，素粒子物理はいわゆる“標準模型”でうまく記述されている。電磁相互作用，弱い相互作用，そして強い相互作用はこの非可換ゲージ理論により記述され，素粒子のかかわる現象の多様性は捨象され，形式面，数学的側面のみが強調されすぎている。多くの研究者が真の統一理論でなく，多くのパラメーターが含まれている“標準模型”に満足していない現在，本書を通じて，読者が自然と物理のかかわり方を身につけ，素粒子物理がより大きく飛躍するのに役立てば望外の喜びである。

本書の翻訳は，昨年の夏から始められた。丸善出版事業部の田島俊之氏には原稿の整理や索引作成，校正などでお世話になった。感謝の意を表したい。

1992年9月

大場一郎

索引

Index

〈さ行〉

訳者の略歴

大場一郎　(おおば・いちろう)

早稲田大学理工学部物理学科教授。理学博士。
昭和38年早稲田大学理工学部卒業。昭和43年同大学大学院理工学研究科博士課程修了。
主な著・訳書は『物理学最前線16（小林・益川理論）』(共立出版)，パウリ『場の量子論』(共立出版)，『目で楽しむ量子力学の本』(丸善) などがある。

ファインマン・レクチャー　素粒子物理学

平成4年10月30日　発　行

訳　者　大　場　一　郎

発行者　鈴　木　信　夫
出版事業部　深山恒雄

発行所　丸善株式会社　東京・日本橋

出版事業部　〒113　東京都文京区本郷二丁目38番3号
編集部　電話 (03) 5684-5081／FAX (03) 5684-2458
営業部　電話 (03) 5684-5571／FAX (03) 5684-2456
郵便振替口座　東京7-5番

組版印刷・株式会社精興社／製本・交通製本株式会社

ISBN 4-621-03757-9 C3042　　Printed in Japan